

Изв. Крымск. Астрофиз. Обсерв. 118, № 2, 13–19 (2022)

УДК 535.361

Рассеивающие свойства ледяных частиц сферической формы

*Д.В. Петров, Е.А. Жужулина*ФГБУН “Крымская астрофизическая обсерватория РАН”, Научный, 298409, Крым
dvp@craocrimea.ru

Поступила в редакцию 27 октября 2021 г.

Аннотация. Водяной лед широко распространен в Солнечной системе. Размеры частиц водяного льда распределены в достаточно широком диапазоне. Однако компьютерное моделирование рассеяния света достаточно большими частицами льда на современном этапе развития компьютерной техники реализуемо лишь в приближении геометрической оптики. Открытым остается вопрос о предельном размере, начиная с которого геометрическая оптика начинает хорошо описывать рассеивающие свойства. Ввиду этого, для качественного изучения рассеивающих свойств ледяных частиц была использована теория Ми, описывающая рассеяние света идеальной сферой. В данной работе мы исследовали особенности характеристик рассеяния света, таких как интенсивность и поляризация, а также фотометрический цвет, большими частицами водяного льда размером до ~ 0.7 мм. Изучено влияние размера рассеивающей частицы и фазового угла на рассеивающие свойства ледяных частиц. Определен минимальный размер ледяной сферической частицы, равный 50 мкм, при котором рассеяние может быть описано законами геометрической оптики.

Ключевые слова: водяной лед, рассеяние света, теория Ми, поляризация, фотометрический цвет

1 Введение

Исследование поляризационных характеристик света, рассеянного поверхностями, является важным источником информации о физических свойствах этих поверхностей. Фазовая зависимость линейной поляризации считается одной из самых информативных поляризационных характеристик. С ее помощью можно определить альбедо, примерный композиционный состав, размеры частиц, слагающих отражающую поверхность, и т. д. Для интерпретации наблюдаемых поляризационных свойств рассеянного излучения используются методы компьютерного моделирования, которые позволяют рассчитывать рассеивающие свойства частиц практически любого размера. Однако при достижении некоторого размера рассеивающего объекта, достаточно большого по сравнению с длиной волны светового излучения, рассеяние может быть описано простыми соотношениями геометрической оптики. Но вопрос об этом предельном размере до сих пор остается открытым.

Попытки оценить предельный размер делались неоднократно путем компьютерного моделирования рассеяния света частицами неправильной формы как можно большего размера. В работе [Zubko \(2005\)](#) была рассчитана степень линейной поляризации для ледяных, органических и силикатных фрактальных частиц вплоть до размера 1.5 мкм, однако предельного размера достичь так и не удалось. В работе [Kolokolova et al. \(2017\)](#) на основе модели шероховатых сфероидов была сделана оценка предельного размера для силикатных частиц, который составил 3.5 мкм. Однако в недавней работе [Zubko et al. \(2020\)](#) на основе модели агломератных обломочных частиц была рассчитана степень линейной поляризации силикатных и углеродных частиц вплоть до размера около 5 мкм. И оказалось, что даже при таком размере (который потребовал гигантских вычислительных ресурсов и, по-видимому, близок к пределам современной вычислительной техники) степень линейной поляризации заметным образом зависит от размера рассеивающей частицы.

В данной работе мы попытались пойти иным путем – оценить этот размер для ледяных частиц, учитывая следующую его особенность: в рамках геометрической оптики длина волны считается пренебрежимо малой по сравнению с размером рассеивающего объекта, и потому увеличение размера

рассеивающего объекта выше предельного размера должно оставлять относительные характеристики рассеянного света, такие как степень линейной поляризации, практически неизменными.

Частицы водяного льда являются неотъемлемой частью многих объектов Солнечной системы – от Луны и комет до спутников планет-гигантов. Например, Европа – самый маленький из четырех галилеевых спутников, вращающихся вокруг Юпитера, и имеет на поверхности водно-ледяную корку. Для изучения химических и физических свойств ледяной корки Европы необходимы как фотополариметрические наблюдения, так и компьютерное моделирование светорассеяния. Однако точные методы компьютерного моделирования рассеяния света несферическими частицами ограничены возможностями современной компьютерной техники, не позволяя провести расчет рассеяния достаточно большой частицей (размером более 10 мкм) за разумное время. Следует также отметить, что применяемые в настоящее время методы моделирования процессов рассеяния кластером частиц или переноса излучения требуют вычисления индикатрисы рассеяния одиночной частицы, входящей в состав кластера (Tishkovets, Petrova, 2020). При этом Борен и Хафмен (1986) доказали, что теория Ми может послужить ориентиром при изучении рассеивающих свойств. Вот почему в первом приближении, для качественного изучения характеристик рассеяния большими компактными ледяными частицами, размеры которых вдоль трех взаимно перпендикулярных координатных осей приблизительно одинаковы, может быть использована теория Ми.

Теория Ми – это строгая математическая и физическая теория рассеяния электромагнитного излучения однородными сферическими частицами, развитая Густавом Ми в 1908 году. В отличие от теории Рэлея, применимой только для частиц, чей размер намного меньше долины волны, теория Ми охватывает все возможные отношения размера сферической частицы к длине волны. Данная теория основана на точном решении уравнения Максвелла для случая рассеяния света на однородной сферической частице. В рамках теории Ми, благодаря простоте граничных условий на поверхности шара в сферической системе координат, была проведена факторизация уравнений Максвелла и удалось получить строгое решение, удовлетворяющее этим уравнениям. Теория Ми долгое время оставалась единственной строго решенной задачей в рамках рассеяния света и до сих пор играет важную роль в изучении рассеяния света частицами, очень близкими по форме к сферам (такими как дождевые капли в земной атмосфере, капли серной кислоты в атмосфере Венеры (Petrov, Zhuzhulina, 2020a), сферические частицы полистерена в воздухе (Petrov, Zhuzhulina, 2020b)), в изучении 10-микронной силикатной особенности частиц кварца (Petrov et al., 2020) и во многих других приложениях.

2 Методы выполнения расчетов при помощи теории Ми

Методы выполнения расчетов при помощи теории Ми обсуждались многими авторами. После нескольких десятилетий исследований методика расчетов была весьма хорошо разработана. Следует отметить вклад самого создателя теории Густава Ми (Mie, 1908), а также Infeld (1947), Dave (1969), Lentz (1976), Wiscombe (1980) и многих других.

Хорошее описание теории Ми дано van de Hulst (1957). Но несмотря на то, что приведенные в литературе формулы являются вполне полным и точным описанием теории Ми, совокупность этих формул затруднительна для практического использования ввиду избыточности описания рассеянного поля в так называемой дальней зоне. Дальняя зона – область пространства, достаточно удаленная от рассеивающего объекта, из-за чего радиальная компонента электрического и магнитного векторов становится пренебрежимо мала (Mishchenko, 2006). Здесь мы приведем совокупность формул, необходимых и достаточных для вычисления характеристик рассеянного шаром света, таких как интенсивность и поляризация, в дальней зоне.

Пусть шар имеет радиус R и показатель преломления m и освещается монохроматическим излучением с длиной волны λ . В этом случае характеристики рассеянного света могут быть вычислены путем следующих относительно простых соотношений. Интенсивность рассеянного света в зависимости от угла рассеяния θ (угла между направлениями распространения падающей и рассеянной волны) рассчитывается по формуле:

$$I(\theta) = |E_{\perp}(\theta)|^2 + |E_{\parallel}(\theta)|^2. \quad (1)$$

Степень линейной поляризации рассчитывается по следующей формуле:

$$P(\theta) = \frac{|E_{\perp}(\theta)|^2 - |E_{\parallel}(\theta)|^2}{|E_{\perp}(\theta)|^2 + |E_{\parallel}(\theta)|^2}. \quad (2)$$

Величины E_{\parallel} и E_{\perp} представляют собой напряженности электрического поля в дальней зоне, в плоскости рассеяния и в плоскости, перпендикулярной плоскости рассеяния соответственно. Эти величины могут быть вычислены по следующим формулам:

$$E_{\perp}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n q_n(\cos\theta) - b_n p_n(\cos\theta)], \quad (3)$$

$$E_{\parallel}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n p_n(\cos\theta) - b_n q_n(\cos\theta)], \quad (4)$$

где

$$p_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sin^2\theta} [P_{n-1}^1(\cos\theta) - \cos\theta P_n^1(\cos\theta)], \quad (5)$$

$$q_n(\cos\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} [P_{n-1}^1(\cos\theta) - \cos\theta P_n^1(\cos\theta)] - n(n+1)P_n^1(\cos\theta). \quad (6)$$

Здесь $P_n^1(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра $P_n^m(x)$ при $m=1$ и $x = \cos\theta$ (Arfken, 1985).

Одно из основных достоинств теории Ми – это разделение переменных. От угловых величин зависят лишь вышеприведенные функции, а от параметров рассеивающего шара зависят только коэффициенты разложения a_n и b_n . Эти коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\psi'_n(mx)}, \quad (7)$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi'_n(x) - m\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{\psi_n(mx)\xi'_n(x) - m\xi_n(x)\psi'_n(mx)}. \quad (8)$$

Здесь величина $x = \frac{2\pi R}{\lambda}$ называется размерным параметром, а m – показатель преломления. Полезно отметить, что при $m \rightarrow 1$ коэффициенты разложения a_n и b_n стремятся к нулю, поскольку в отсутствие рассеивающей частицы исчезает и рассеянное ею поле. Функции $\psi_n(x)$ и $\xi_n(x)$ – это функции Риккати–Бесселя и Риккати–Ханкеля соответственно:

$$\psi_n(x) = x j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (9)$$

$$\xi_n(x) = x h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x). \quad (10)$$

Здесь $j_n(x)$ и $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Бесселя и Ханкеля, которые могут быть выражены через функции Бесселя $J_\nu(x)$ и Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ полуцелого порядка. Отметим, что функции $\psi'_n(x)$ и $\xi'_n(x)$ – это производные функций Риккати–Бесселя и Риккати–Ханкеля по их аргументу.

При расчетах рассеяния света шаром наиболее сложный этап – это вычисление коэффициентов разложения a_n и b_n . Несмотря на то, что функции Бесселя достаточно хорошо исследованы, при достаточно больших n возникает неопределенность вида $\infty - \infty$, то есть прямолинейное вычисление рассеяния шарами большого размера приводит к существенным ошибкам даже при использовании современных компьютеров. Решение этой проблемы приведено в работе Deirmendjian et al. (1961), где авторы предложили вычислять не сами функции Риккати–Бесселя и Риккати–Ханкеля, а их логарифмические производные:

$$C_n = \frac{1}{\zeta_n} \frac{d\zeta_n}{dx}, \quad (11)$$

где ζ_n означает как функцию Риккати–Бесселя, так и функцию Риккати–Ханкеля. В работе (Cantrell, 1988) получены рекуррентные соотношения для величин C_n :

$$C_n = -\frac{n}{x} + \frac{1}{\frac{n}{x} - C_{n-1}}. \quad (12)$$

С помощью этих рекуррентных соотношений легко вычислить коэффициенты разложения a_n и b_n , а следовательно, вычислить характеристики рассеяния в дальней зоне даже в случае достаточно больших шаров.

Для вычислений использовалась наша собственная программная реализация вышеописанных соотношений теории Ми, ранее использованная для вычислений рассеяния света шарами, сравнимыми с длиной волны (Petrov, Zhuzhulina, 2020c). Но с ее помощью оказалось возможно провести вычисления рассеивающих свойств для шаров очень больших размеров, порядка 0.7 мм. Тестирование программы проводилось путем сравнения вычислений при помощи нашей программы и программы Мищенко, разработанной для расчета светорассеяния сфероидами, но применимой и для сфер, доказавшей свою высокую точность и надежность (Mishchenko, Travis, 1998). Тестирование показало очень хорошее совпадение результатов.

3 Результаты и обсуждение

Мы изучали рассеяние света ледяными шарами, варьируя их размеры в достаточно широких пределах – от 0.01 до 700 мкм. Рассматривались две длины волны падающего излучения: 450 и 650 нм. Показатели преломления льда $m = n + i \cdot k$ для этих двух длин волн были взяты из работы Warren, Brandt (2008). Были вычислены интенсивность и степень линейной поляризации для этих двух длин волн, обозначенные соответственно как I_{blue} и P_{blue} для длины волны 450 нм, I_{red} и P_{red} для длины волны 650 нм. Также была вычислена характеристика рассеянного света под названием “фотометрический цвет” $\ln(I_{red}/I_{blue})$.

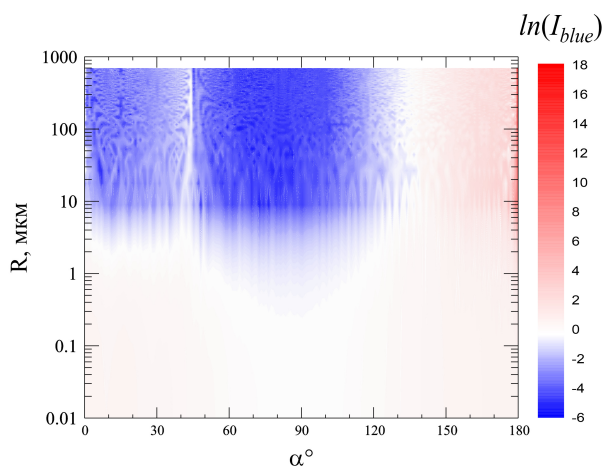


Рис. 1. Карта интенсивности рассеянного света в зависимости от фазового угла (горизонтальная ось) и размера рассеивающей частицы льда (вертикальная ось) для длины волны 450 нм

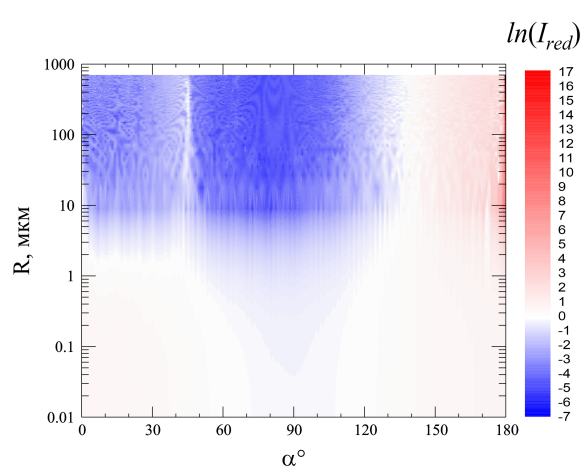


Рис. 2. Карта интенсивности рассеянного света в зависимости от фазового угла (горизонтальная ось) и размера рассеивающей частицы льда (вертикальная ось) для длины волны 650 нм

На рис. 1 и рис. 2 приведены карты интенсивности рассеянного света в зависимости от фазового угла (горизонтальная ось) и размера рассеивающей частицы льда (вертикальная ось) для длин волн 450 нм (рис. 1) и 650 нм (рис. 2).

Было показано, что фотометрические (рис. 1 и рис. 2) и поляриметрические (рис. 3 и рис. 4) свойства ледяных сферических частиц, чей радиус превышает 50 мкм, практически не зависят от дальнейшего увеличения размера. Отрицательную поляризацию на малых фазовых углах проявляют частицы, чей радиус находится в диапазоне от 1 до 20 мкм. У частиц большого размера проявляется отчетливая ветвь положительной поляризации в диапазоне фазовых углов от 60 до 120 градусов. Помимо этого, следует ожидать наличие отрицательной ветви степени линейной поляризации больших ледяных частиц при фазовых углах более 120 градусов.

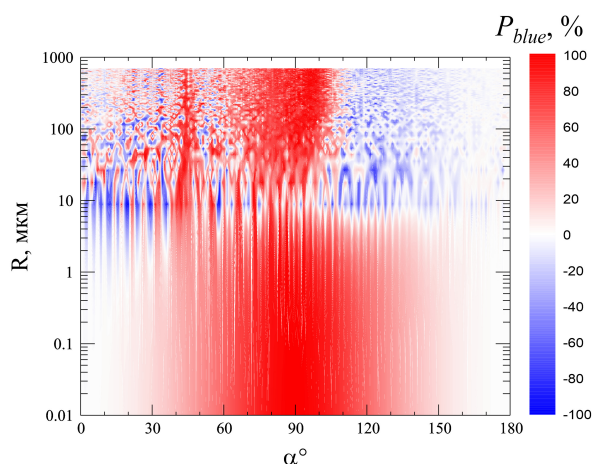


Рис. 3. Карта степени линейной поляризации рассеянного света в зависимости от фазового угла (горизонтальная ось) и размера рассеивающей частицы льда (вертикальная ось) для длины волны 450 нм

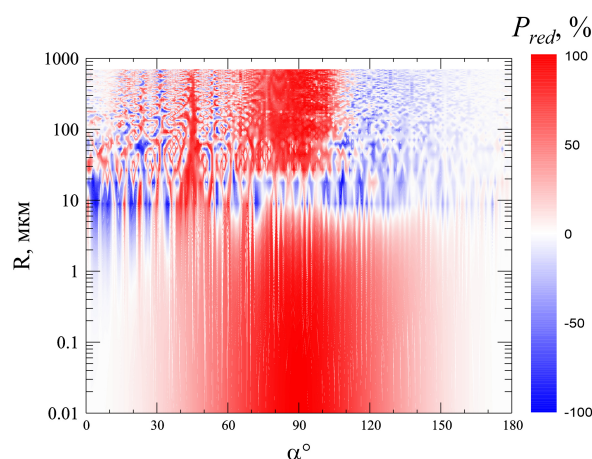


Рис. 4. Карта степени линейной поляризации рассеянного света в зависимости от фазового угла (горизонтальная ось) и размера рассеивающей частицы льда (вертикальная ось) для длины волны 650 нм

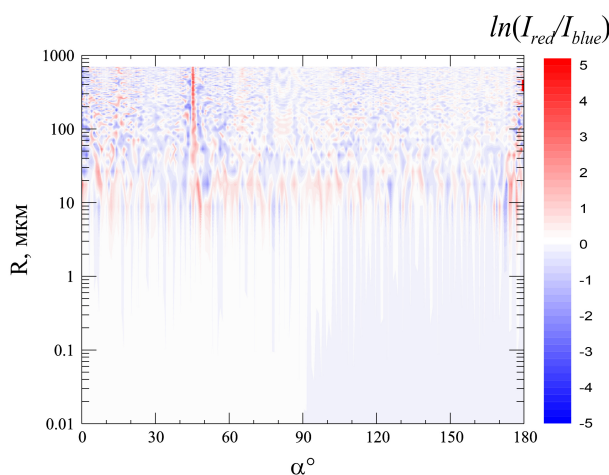


Рис. 5. Карта фотометрического цвета в зависимости от фазового угла (горизонтальная ось) и размера рассеивающей частицы льда (вертикальная ось)

На рис. 5 приведена карта фотометрического цвета в зависимости от фазового угла (горизонтальная ось) и размера рассеивающей частицы льда (вертикальная ось). Из рисунка видно, что сферические частицы льда демонстрируют околонулевой фотометрический цвет при размере частиц менее 10 мкм и фазовых углах от 0 до 90 градусов. При размере частиц менее 10 мкм и фазовых углах от 90 до 180 градусов фотометрический цвет отрицательный. Область преимущественно положительного фотометрического цвета наблюдается в достаточно узком диапазоне размеров, от 10 до 20 мкм. Частицы большего размера демонстрируют сильную переменчивость фотометрического цвета.

4 Выводы

В данной работе были изучены рассеивающие свойства ледяных частиц сферической формы, такие как интенсивность и поляризация рассеянного света, а также фотометрический цвет. Для расчетов была использована теория Ми, описывающая рассеяние света идеальной сферой. Размеры исследуемых частиц варьировались от 0.01 до 700 мкм. Один из основных выводов данной работы заключается

ся в том, что степень линейной поляризации света, рассеянного ледяными сферическими частицами, чей радиус превышает 50 мкм, практически не зависит от дальнейшего увеличения размера. Это происходит потому, что при достаточно больших размерах рассеивающего объекта его рассеяние может быть достаточно хорошо описано законами геометрической оптики, которые не зависят от длины волны падающего излучения. Этот вывод крайне важен для компьютерного моделирования светорассеяния в целом, ибо методы расчета рассеяния света несферическими частицами требуют достаточно заметных вычислительных ресурсов (как времени расчета, так и оперативной памяти), которые растут очень быстро (практически экспоненциально) по мере роста размера рассеивающей частицы. Поэтому оценка размера ледяных частиц, при котором начинают работать законы геометрической оптики, позволяет точнее определить компьютерные мощности, необходимые для решения той или иной задачи светорассеяния. Следует отметить, что поскольку рассеяние света шаром гораздо более чувствительно к размеру шара, чем рассеяние несферической частицей, то определенный в работе размер 50 мкм можно рассматривать как верхнюю грань размера несферической частицы, при которой начинают работать законы геометрической оптики.

Исследованы характерные особенности степени линейной поляризации света, рассеянного частицами различного размера на различных фазовых углах, а также характерные особенности поведения фотометрического цвета. Эти оценки могут быть полезны для интерпретации фотометрических и поляриметрических наблюдений безатмосферных тел Солнечной системы и атмосфер комет, имеющих в своем составе ледяные частицы, для приблизительного вычисления их физических характеристик.

Литература

- Борен К., Хафмен Д., 1986. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир. [Bohren C., Huffman D., 1986. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. М.: Mir. (In Russ.)]
- Arfken G., 1985. Legendre Functions, Ch. 12 in *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 637–711.
- Cantrell C.D., 1988. Numerical methods for the accurate calculation of spherical Bessel functions and the location of Mie resonances. Richardson, TX: University of Texas at Dallas.
- Dave J.V., 1969. *IBM J. Res. Dev.*, vol. 13, pp. 302–313.
- Deirmendjian D., Clasen R., Viezee W., 1961. *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 51, pp. 620–633.
- Infeld L., 1947. *Q. Appl. Math.*, vol. 5, pp. 113–132.
- Kolokolova L., Das H.S., Dubovik O., Lapyonok T., Yang P., 2015. *Planetary and Space Science*, vol. 116, pp. 30–38, doi:10.1016/j.pss.2015.03.006.
- Lentz W.J., 1976. *Appl. Opt.*, vol. 15, pp. 668–671.
- Mie G. 1908. *Annalen der Physik*, vol. 330, no. 3, pp. 377–445.
- Mishchenko M., Travis L.D., 1998. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 60, pp. 309–324.
- Mishchenko M.I., 2006. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Trans.*, vol. 100, pp. 268–276.
- Petrov D., Savushkin A., Zhuzhulina E., 2020. *Research Notes of the AAS*, vol. 4, no. 9, p. 161.
- Petrov D., Zhuzhulina E., 2020a. In Romanyuk I.I. et al. (Ed.), *Ground-Based Astronomy in Russia. 21st Century, Proceedings of the All-Russian Conference*. Nizhnii Arkhyz: SAO RAN, pp. 320–321.
- Petrov D., Zhuzhulina E., 2020b. *Spectroscopy and Spectral Analysis*, vol. 40, no. 1, pp. 324–327.
- Petrov D., Zhuzhulina E., 2020c. *J. Quant. Spectr. Radiat. Trans.*, vol. 242, p. 106806.
- Tishkovets V.P., Petrova E.V., 2020. *J. Quant. Spectr. Radiat. Trans.*, vol. 255, p. 107252, doi:10.1016/j.jqsrt.2020.107252.
- van de Hulst H.C., 1957. *Light Scattering by Small Particles*. Wiley, New York.
- Warren S.G., Brandt R.E., 2008. *J. Geophys. Res.*, vol. 113, p. D14220.
- Wiscombe W.J., 1980. *Appl. Opt.*, vol. 19, pp. 1505–1509.
- Zubko E., Petrov, D., Shkuratov, Y., Videen, G. 2005. *Appl. Opt.*, vol. 44, pp. 6479–6485.
- Zubko E., Videen G., Arnold J.A., MacCall B., Weinberger A.J., Kim S.S., 2020. *Astrophys. J.*, vol. 895, no. 2, p. 110.

Scattering properties of spherical ice particles

D. Petrov, E. Zhuzhulina

Crimean Astrophysical Observatory, Nauchny 298409
dvp@craocrimea.ru

Abstract. Water ice is widespread in the solar system. The sizes of water ice particles are distributed over a fairly wide range. However, computer simulation of light scattering by sufficiently large ice particles at the present stage of development of computer technology can only be realized in the approximation of geometrical optics. The question of the limiting size remains open, starting from which geometric optics begins to describe scattering properties well. In view of this, for a qualitative study of the scattering properties of ice particles, the Mie theory was used, which describes the scattering of light by an ideal sphere. In this work, we investigated the features of light scattering characteristics, such as intensity and polarization, as well as photometric color, by large particles of water ice with a size of about 0.7 mm. The effect of the scattering particle size, as well as the phase angle, on the scattering properties of ice particles is studied. The minimum size of an ice spherical particle is determined, at which scattering can be described by the laws of geometric optics.

Key words: water ice, light scattering, Mie theory, polarization, photometric color