

УДК 523.985.3

## Граничные условия и МГД-равновесие бессиловых магнитных жгутов

*Ю.Т. Цап<sup>1</sup>, Ю.Г. Копылова<sup>2</sup>*<sup>1</sup> ФГБУН “Крымская астрофизическая обсерватория РАН”, Научный, 298409, Крым  
*yur\_crao@mail.ru*<sup>2</sup> ФГБУН ГАО РАН, Пулковское шоссе д. 65, кор. 1, Санкт-Петербург, 196140, РФ  
*yul@gaoran.ru*

Поступила в редакцию 12 ноября 2022 г.

**Аннотация.** Проведен анализ магнитогидродинамического (МГД) равновесия бессиловых магнитных жгутов с учетом граничных условий. Показано, что использование, в частности, производящей функции для решения уравнения МГД-равновесия бессилового жгута может приводить к некорректным выводам. Условие непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля на граничной поверхности в приближении идеальной магнитогидродинамики всегда выполняется и не требует отдельного рассмотрения.

**Ключевые слова:** Солнце, корональные петли, изгибная неустойчивость

### 1 Введение

Магнитные трубки (жгуты) – одно из наиболее важных понятий космической магнитогидродинамики (МГД). Они представляют собой образования цилиндрической формы, основные параметры которых (температура, концентрация плазмы, направление и напряженность магнитного поля) резко меняются в окрестности условной границы. В частности, с ними тесно связана теория МГД-динамо, поскольку, как считается, именно сила плавучести ответственна за выход нового магнитного потока из конвективной зоны на поверхность Солнца и звезд. Трубки могут играть важную роль в процессе звездообразования, а также солнечной и звездной активности.

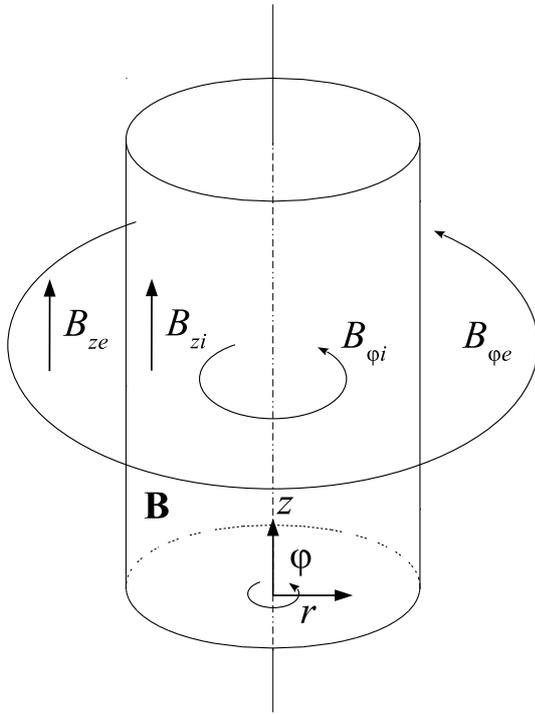
Значимость изучения солнечных корональных петель трудно переоценить из-за их связи с нагревом короны, солнечным ветром, вспышками и корональными выбросами плазмы. В связи с этим нет ничего удивительного, что их исследованию посвящено большое количество работ (см., например, обзор [Reale, 2014](#)). Поскольку данные магнитные образования обладают достаточно резкими боковыми границами, то в ходе рассмотрения их МГД-равновесия чрезвычайно остро встает вопрос о граничных условиях, описывающих сшивку параметров магнитной трубки (кривизной петель зачастую пренебрегают) по разные стороны от границы. Обычно они сводятся к равенству полного давления, а в случае возмущенной границы – к равенству поперечных компонент скорости на ее внутренней и внешней поверхности. Хотелось бы также особо отметить, что этот подход чрезвычайно широко распространен при описании МГД-явлений в условиях не только солнечной ([Bennett et al., 1999](#); [Carter, Erdélyi, 2008](#); [Erdélyi, Fedun, 2010](#); [Zaqarashvili et al., 2010, 2014](#); [Ruderman, Terradas, 2015](#)), но и лабораторной плазмы ([Goedbloed, Poedts, 2004](#)). Причем в первом случае приближение резкой границы естественным образом следует из условия высокой проводимости плазмы и, соответственно, малой толщины диффузионного граничного слоя, образующегося в результате “расплывания” магнитного поля в плазме. Этот узкий слой может играть чрезвычайно важную роль как в равновесии МГД-жгутов, так и в выполнении условия непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля ([Цап, Шаховская, 2000](#)).

Сравнительно недавно в работе [Solov'ev, Kirichek \(2021\)](#) было отмечено, что в работе [Tsap et al. \(2020\)](#), посвященной МГД-устойчивости экранированного (внешнее азимутальное магнитное поле

$B_{\varphi e}(r > a) = 0$ , где  $a$  – радиус сечения) бессилового жгута, принятая модель не является обоснованной. Это вытекает из непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля  $\mathbf{E}_\tau$ , предполагающей, по мнению Solov'ev, Kirichek (2021), невозможность скачка электрического тока на границе. Также Solov'ev, Kirichek (2021), исходя из заданных с помощью производящей функции решений уравнения МГД-равновесия, пришли к заключению, что на характерном расстоянии  $r_0$  от оси жгута может формироваться сингулярная магнитная поверхность, где происходит бесконечный рост значений плотности тока  $j$  и параметра бессилового поля  $\alpha$ , а также имеет место разрыв производных  $\partial j/\partial r$  и  $\partial \alpha/\partial r$ .

Несмотря на то, что необходимость выполнения условия непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля на границе трубки у нас сомнений не вызывает (Landau, Lifshitz, 1966), тем не менее мы не можем полностью согласиться с выводами Solov'ev, Kirichek (2021). На наш взгляд, авторами не был принят во внимание ряд обстоятельств, которые мы и рассмотрим ниже.

## 2 Бессилового магнитный жгут с резкой границей



**Рис. 1.** Схематическое изображение магнитного жгута

Для лучшего понимания сути проблемы остановимся на указанных рассуждениях более обстоятельно.

Solov'ev, Kirichek (2021) для получения зависимостей компонент магнитного поля  $B_z(r)$  и  $B_\varphi(r)$  от радиуса сечения  $r$  прямого осесимметричного бессилового жгута исходили из уравнения МГД-равновесия

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{B_z^2 + B_\varphi^2}{8\pi} \right) + \frac{B_\varphi^2}{4\pi r} = 0. \quad (2)$$

При этом решение (2) задавалось в виде производящей функции

$$F(r) = B_z^2(r) + B_\varphi^2(r).$$

Функция  $F(r)$  позволяет выразить компоненты магнитного поля следующим образом:

$$B_z(r) = \sqrt{F + (r/2)dF/dr}, \quad B_\varphi(r) = \sqrt{-(r/2)dF/dr}.$$

Используя цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  и нижние индексы  $i$  и  $e$  для внутренних и внешних параметров, проведем анализ МГД-равновесия прямого осесимметричного жгута с магнитным полем (рис. 1):

$$\mathbf{B} = \begin{cases} (0, B_{\varphi i}(r), B_{z i}(r)), & r \leq a; \\ (0, B_{\varphi e}(r), B_{z e}(r)), & r > a. \end{cases} \quad (1)$$

Как следует из выражения (1), мы рассматриваем границу цилиндра как МГД-разрыв. Такой подход позволяет существенно упростить исследование свойств равновесных магнитных конфигураций. Вследствие этого нет ничего удивительного, что модель (1) широко используется многими авторами (Bennett et al., 1999; Carter, Erdélyi, 2008; Erdélyi, Fedun, 2010; Zaqarashvili et al., 2010, 2014; Ruderman, Terradas, 2015), в первую очередь, для жгутов солнечной короны. Между тем Solov'ev, Kirichek (2021) пришли к выводу о недостаточной обоснованности модели экранированного бессилового всплывающего жгута ( $B_{\varphi e}(r > a) = 0$ ), а также лабораторного пинча ( $B_{\varphi e}(r > a) \propto 1/r$ ) с резкой границей из-за нарушения непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля  $\mathbf{E}_\tau$ , что предполагает необходимость проведения дополнительного анализа. При этом Solov'ev, Kirichek (2021) обратили внимание на существование особых магнитных поверхностей внутри

Следовательно, подбирая с учетом граничных условий функцию  $F(r)$ , мы можем определить зависимости  $B_z(r)$  и  $B_\varphi(r)$ .

В основе построения  $F(r)$  лежал закон Ампера, который можно представить в виде

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (3), для азимутальной составляющей магнитного поля  $B_\varphi$  прямого осесимметричного жгута имеем

$$\oint B_\varphi dr = \frac{2}{c} \int j_z d\Sigma = \frac{2I_z}{c}, \quad (4)$$

где  $\Sigma$  – площадь поперечного сечения жгута. Уравнение (4) подразумевает, что полный продольный электрический ток  $I_z = 0$  для экранированного магнитного жгута (этот случай соответствует нейтрализованному току в фотосфере). Следовательно, ток  $j_z$  должен менять свое направление на противоположное на некотором расстоянии от оси трубки, а азимутальная компонента магнитного поля во внешней области  $B_\varphi(r > 0) = 0$ .

Принимая во внимание вышесказанное, Solov'ev, Kirichek (2021) производящую функцию задали следующим образом:

$$F(r) = B_0^2[G + (1 - G)f(r)], \quad G = \frac{B_{ze}^2}{B_0^2}, \quad (5)$$

где  $B_0$  – магнитное поле на оси жгута,  $f(r)$  – некоторая непрерывная безразмерная убывающая функция, описывающая распределение равновесного магнитного поля внутри жгута. Подчеркнем, что радиус экранированного жгута  $a$  определялся следующим образом:

$$F(a) = B_{ze}^2, \quad (6)$$

т. е. точкой  $r = a$ , в которой  $B_\varphi(a) = 0$ . Условие (6), согласно уравнению (5), предполагает  $f(a) = 0$ , хотя привлекаемые в работе Solov'ev, Kirichek (2021) функции  $f(r)$  стремятся к нулю лишь в асимптотике (например,  $f(r) = \exp(-k^2 r^2)$ ). Это означает, что радиус магнитного жгута  $a$  не определен, поскольку его можно считать бесконечно большим. Следовательно, область экранирования токового жгута формально также является неограниченной (см. также Solov'ev, 2022). Используемый авторами подход объясняется стремлением избежать приближения резкой границы “плазма-плазма”, которое, по их мнению, нарушает условие непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля  $\mathbf{E}_\tau$ .

На наш взгляд, было бы более разумно отождествить характерный радиус жгута  $a$  с областью толщины  $\Delta r$ , где происходят наиболее резкие изменения основных параметров жгута, включая электрический ток  $j$  и параметр  $\alpha$ . При этом, если  $\Delta r/a \rightarrow 0$ , то такая область сводится к граничной боковой поверхности, которую можно рассматривать как МГД-разрыв, что позволяет избежать появления каких-либо особенностей и несостыковок в решении уравнения МГД-равновесия (2). Однако в общем случае  $\Delta r$  может меняться в широких пределах.

Мы считаем, что при корректной постановке задачи каких-либо особых (сингулярных) магнитных поверхностей как внутри жгута, так и в области границы возникать не должно. Действительно, из уравнения (3) для компонент плотности электрического тока имеем

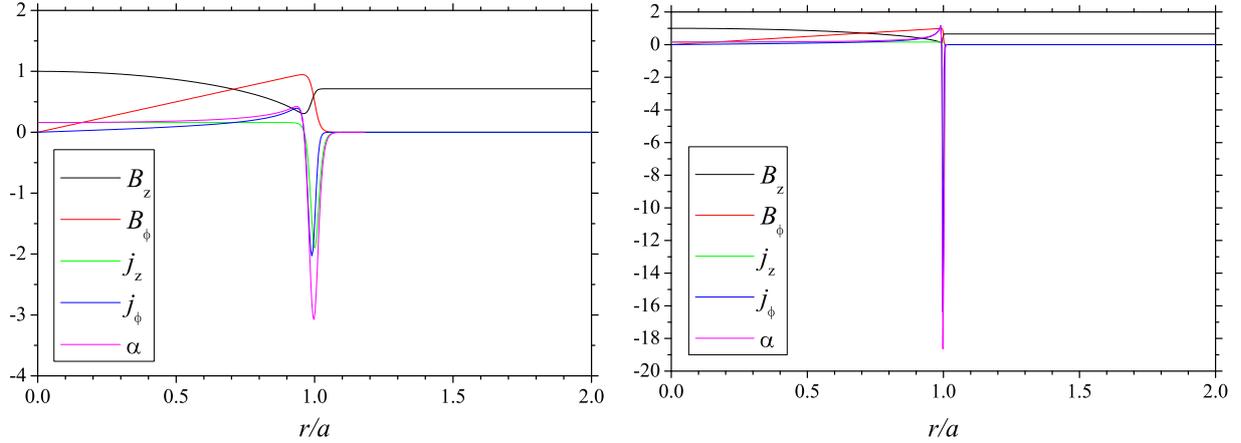
$$j_z = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}, \quad j_\varphi = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial r}. \quad (7)$$

Положив для простоты азимутальное магнитное поле

$$B_\varphi = \frac{r/a}{1 + (r/a)^\kappa}, \quad (8)$$

где  $\kappa = \text{const}$ , из уравнений (2), (7) и (8) находим

$$\frac{B_z(r)}{B_z(0)} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{B_\varphi^2(r)}{2B_z^2(0)} - \frac{1}{B_z^2(0)} \int_0^r \frac{B_\varphi^2(r)}{r} dr \right)^{1/2}.$$



**Рис. 2.** Зависимость равновесных значений компонент магнитного поля  $B_z$  и  $B_\varphi$ , плотности электрического тока  $j_z$  и  $j_\varphi$  и бессиловой параметра  $\alpha$  от относительного радиуса поперечного сечения  $r/a$  при  $\kappa = 100$  (верхняя панель) и  $\kappa = 1000$  (нижняя панель). “Провал” значений  $j_z$ ,  $j_\varphi$  и  $\alpha$  в окрестности  $r/a = 1$  соответствует области границы

Причем бессиловой параметр

$$\alpha = \frac{j_z}{B_z} = \frac{j_\varphi}{B_\varphi}. \quad (9)$$

Результаты наших численных расчетов компонент магнитного поля  $B_z$  и  $B_\varphi$ , плотности электрического тока  $j_z$  и  $j_\varphi$ , а также параметра  $\alpha$  в условных единицах при  $\kappa = 100$  и  $\kappa = 1000$  представлены на рис. 2. Как и ожидалось, каких-либо особенностей для  $j$  и  $\alpha$ , по крайней мере, в области границы ( $r = a$ ), предполагающей разрыв, мы не обнаруживаем, хотя характерная толщина граничного слоя  $\Delta r \rightarrow 0$ , а  $j$  и  $\alpha$  могут достигать сколь угодно больших, но конечных значений. Из этого тривиального, но наглядного примера следует, что приближение резкой границы для описания МГД-равновесия или устойчивости бессиловой магнитного жгута является вполне допустимым упрощением. В предложенной модели, в отличие от Solov’ev, Kirichek (2021), какие-либо особые магнитные поверхности не возникают.

По мнению Solov’ev, Kirichek (2021), модель (1) нарушает непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля  $\mathbf{E}_\tau$  на границе. Между тем в общем случае непрерывность компоненты  $\mathbf{E}_\tau^*$  для движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$  границы можно представить в виде (Sommerfeld, 1949; Landau, Lifshitz, 1966; Miyamoto, 2000)

$$\langle (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) \rangle = \mathbf{E}_{\tau e}^* - \mathbf{E}_{\tau i}^* = 0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к границе раздела, а электрическое поле

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (11)$$

Поскольку в рамках идеальной МГД

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \approx 0, \quad (12)$$

то уравнение (10) выполняется автоматически, и вопрос о непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля  $\mathbf{E}_\tau^*$  в рамках идеальной плазмы не возникает.

Особо подчеркнем, что учет скорости плазмы  $\mathbf{v}$  для бессиловых магнитных жгутов имеет глубокий физический смысл, на который впервые обратил внимание Альвен (см., например, Альвен, Фельтхаммар, 1967). Ведь под действием электрического поля возникает дрейф электронов и ионов в направлении оси жгута со скоростью

$$\mathbf{v} = \frac{c}{B^2}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

С другой стороны, с учетом (11) в движущейся системе координат электрическое поле

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{B}}{B}(\mathbf{E}\mathbf{B}) - \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel}.$$

Отсюда следует, что только благодаря дрейфовому движению плазмы становится возможным формирование бессильных магнитных структур в короне Солнца.

### 3 Обсуждение результатов и выводы

Нами было показано, что вывод Solov'ev, Kirichek (2021) о возможности формирования особых магнитных поверхностей, предполагающих наличие сингулярности для плотности электрического тока и параметра  $\alpha$  внутри равновесных магнитных жгутов, едва ли можно считать убедительным. На наш взгляд, он обусловлен неудачным выбором производящей функции  $F(r)$ , т. е. решения уравнения МГД-равновесия (см. также Solov'ev, 2022). Отметим также, что используемый авторами подход предполагает радиус жгута  $a \rightarrow \infty$  и, соответственно, бесконечно большую экранирующую область. Поэтому в настоящей работе мы связали характерную границу жгута  $a$  с тонким слоем, где магнитное поле, электрический ток и параметр  $\alpha$  меняются достаточно резко.

Как следует из полученных результатов, в приближении идеальной МГД непрерывность тангенциальной компоненты электрического поля  $E^*$  выполняется автоматически, поскольку  $E^* \approx 0$ . Вследствие этого нет ничего удивительного, что при постановке граничных условий для разрыва “плазма-плазма” данное требование обычно во внимание не принимается, поскольку оно “выпадает”. Детальное рассмотрение случая, связанного с учетом конечной электрической проводимости плазмы, предполагает возможность разделения электрических зарядов на граничной поверхности и выходит за рамки настоящей статьи. Однако, как нетрудно показать, в случае высокой, но конечной электрической проводимости использование более общих подходов хорошо согласуется с уравнениями идеальной МГД (Цап, Шаховская, 2000).

Таким образом, модели лабораторного пинча или экранированного магнитного жгута могут быть использованы для описания МГД-равновесия и устойчивости в коронах Солнца и звезд, что позволяет существенно упростить модельные расчеты (Tsap et al., 2020, 2022).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (№ 22-12-00308, Ю.Т. Цап) и Минобрнауки (НИР № 1021051101548-7-1.3.8).

### Литература

- Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г., 1967. Космическая электродинамика. М: Изд. “Мир”. [Alfvén G., Fälthammar K.-G., 1963. *Cosmical Electrodynamics*, 2nd ed. Oxford University Press, Oxford.]
- Цап Ю.Т., Шаховская А.Н., 2000. Кинем. и физ. небесн. тел. Т. 16. № 4. С. 303. [Tsap Yu.T., Shakhovskaya A.N., 2000. *Kinem. i fiz. nebesn. tel*, vol. 16, no. 4, pp. 303–315. (In Russ.)]
- Bennett K., Roberts B. and Narain U., 1999. *Solar Phys.*, vol. 185, no. 1, pp. 41–59.
- Carter B.K., Erdélyi R., 2008. *Astron. Astrophys.*, vol. 481, no. 1, pp. 239–246.
- Erdélyi R., Fedun V., 2010, *Solar Phys.*, vol. 263, no. 1–2, pp. 63–85.
- Goedbloed J.P. Hans, Poedts S., 2004. *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, UK.
- Landau L.D., Lifshitz E.M., 1966. *Klassische Feldtheorie*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Miyamoto K., 2000. *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*. Toki: National Institute of Fusion Science, Japan.
- Reale F., 2014. *Living Rev. Solar Phys.*, vol. 11, pp. 4–94.
- Ruderman M.S., Terradas J., 2015. *Astrophys. J.*, vol. 580, p. A57.
- Solov'ev A.A., 2022. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 515, iss. 4, pp. 4981–4989.
- Solov'ev A.A., Kirichek E.A., 2021, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 505, pp. 4406–4416.
- Sommerfeld A., 1949. *Elektrodynamik*. Leipzig : Akademische Verl. Ges.
- Tsap Y., Fedun V., Cheremnykh O., Stepanov A., Kryshchal A., Kopylova Y., 2020. *Astrophys. J.*, vol. 901, id. 99.
- Tsap Y.T., Stepanov A.V., Kopylova Y.G. 2022, *Astrophys. J.*, vol. 939, id. 114.
- Zaqarashvili T.V., Díaz A.J., Oliver R. and Ballester J.L., 2010, *Astron. Astrophys.*, vol. 516, pp. A84.
- Zaqarashvili T.V., Vörös Z., Narita Y. and Bruno R., 2014. *Astrophys. J.*, vol. 783, pp. L19.

## Boundary conditions and MHD equilibrium of force-free magnetic flux ropes

*Yu.T. Tsap*<sup>1</sup>, *Yu.G. Kopylova*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Crimean Astrophysical Observatory, Nauchny 298409  
*jur\_crao@mail.ru*

<sup>2</sup> Central Astronomical Observatory at Pulkovo, Pulkovskoe ave. 65/1, St. Petersburg 196140, Russia  
*yul@gaoran.ru*

**Abstract.** The analysis of magnetohydrodynamic (MHD) equilibrium was carried out for force-free magnetic flux ropes, taking into account the boundary conditions. In particular, the use of a generating function to solve the MHD equilibrium equation for a force-free flux rope may lead to the incorrect conclusions. The continuity condition for the tangential components of the electric field on the boundary surface is always fulfilled within the ideal MHD approximation, and it does not require additional consideration.

**Key words:** Sun, coronal loops, kink instability