

УДК 523.9-327:519.71:519.246.8:517.443:519.688

## Спектральные методы анализа вращения солнечных структур

Я.И. Зелык<sup>1</sup>, Н.Н. Степанян<sup>2</sup>, О.А. Андреева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт космических исследований НАН Украины и НКА Украины, г. Киев, Украина

<sup>2</sup> НИИ “Крымская астрофизическая обсерватория”, Украина, Крым, Научный

Поступила в редакцию 2 марта 2007 г.

**Аннотация.** Рассматривается применение методов спектрального анализа для изучения вращения солнечных структур. Использовались временные ряды, характеризующие изменение со временем солнечного излучения в линии HeI 1083 нм в пятиградусных широтных зонах. Было опробовано три вида спектрального анализа: метод Уэлча (Welch method), метод мультизаострений (Multitaper method) и метод периодограмм Шустера. Для анализа временных интервалов наблюдений длиной в 26 лет и в 3 года выбраны два первых метода. Метод периодограмм Шустера больше подходит для скользящего спектрального анализа во временном окне длиной 1 год со сдвигом на полгода. Выбранные методы анализа спектров мощности позволяют получить спектральные плотности, мощности значимых пиков в них и соответствующие им периоды, суммарные мощности в заданных интервалах периодов и оценить достоверность найденных пиков и интервалы, в которых могут находиться истинные значения соответствующих пикам периодов.

SPECTRAL METHODS FOR ANALYSIS OF SOLAR STRUCTURES ROTATION, by Ya.I. Zyelyk, N.N. Stepanian and O.A. Andryeyeva. Application of methods of spectral analysis for the study of solar structures rotation is considered. Time series characterizing variation of solar radiation in the HeI 1083 nm line in 5-degree latitude zones were used. Three types of spectral analysis were applied: Welch method, Multitaper method and Schuster periodogram method. For the analysis of observation time interval of 26 and 3 years long two first methods have been chosen. Schuster periodogram method is more appropriate for the sliding spectral analysis in a temporal window 1 year long with a half-year shift. Selected methods of power spectra analysis enable to obtain spectral densities, power of significant peaks in them and periods corresponding to them, summarized power in the given period intervals and to estimate validity of the found peaks and intervals in which true values of periods corresponding to peaks can be found.

**Ключевые слова:** Солнце, вращение

---

## 1 Введение

В данной работе рассматриваются методы спектрального анализа, использованные для изучения вращения солнечных структур по данным наблюдений в верхней хромосфере (Андреева и др., 2006; Степанян и др., 2007). В первой работе (Андреева и др., 2006) описан материал наблюдений, процедура выделения из него данных, касающихся отдельных солнечных образований, рассмотрен способ построения временных рядов значений эквивалентной ширины линии HeI 1083 нм при поглощении (излучении) каждым из видов солнечных структур в пятиградусных широтных зонах

и кратко изложены применяемые методы спектрального анализа этих рядов. Вторая работа (Степанян и др., 2007) посвящена исследованию изменения со временем широтного распределения вращения солнечных структур. Проведен спектральный анализ временных рядов трех типов: 1) по всему временному интервалу продолжительностью около 26 лет; 2) по пяти временным интервалам в 3 года, соответствующим эпохам максимумов и минимумов солнечной активности; 3) скользящий спектральный анализ во временном окне длиной 1 год со сдвигом на полгода.

Настоящая работа посвящена рассмотрению методов периодограмм Шустера, Уэлча (Welch method) и метода мультизаострений (Multitaper Method). Последний базируется на вычислении периодограмм с использованием ортогональных дискретных протяженных сфероидальных последовательностей. В работе дается обоснование выбора наиболее подходящего в каждом случае метода с точки зрения получения реалистичных оценок глобальных характеристик вращения солнечных структур. В качестве примеров приведены результаты расчетов для временного ряда длиной в 26 лет, соответствующего изменению со временем эквивалентной ширины линии HeI 1083 нм в активных областях в широтной зоне 5 градусов на центральном меридиане Солнца.

## 2 Идея метода периодограмм Шустера

Предполагается, что процесс  $x(t)$ , в котором выделяется периодическая составляющая, может быть представлен в виде:

$$x(t) = x_p(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где  $x_p(t)$  — периодическая составляющая, а  $\xi(t)$  — случайная составляющая.

Всякая периодическая функция  $x_p(t)$  с некоторым периодом  $p_0$ , непрерывная на отрезке  $[0, p_0]$  либо имеющая на нем конечное число точек разрыва первого рода, которая может быть представлена в виде временного ряда  $\{x_p n = x_p(t_n)\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), может быть разложена в ряд Фурье следующим образом:

$$x_p(t_n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t_n - \varphi_k), \quad (2)$$

где  $A_0, A_k$  — соответствующие вычисляемые коэффициенты разложения,  $\varphi_k$  — вычисляемые фазы разложения,  $f_0 = 1/p_0$  — фундаментальная частота.

В методе периодограмм наблюдаемый ряд  $\{x(t_n)\}$ , каждый элемент которого получается в дискретные моменты времени  $t_n$  из исходного процесса  $x(t)$  (1) как  $x_n = x(t_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), сравнивается с некоторым пробным гармоническим колебанием с частотой  $f$  и фазой  $\varphi$ , представленным временным рядом следующего вида:

$$\tilde{x}(t_n) = \cos(2\pi f t_n - \varphi) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Очевидно, что в тех случаях, когда частота  $f$  и фаза  $\varphi$  пробного временного ряда  $\tilde{x}(t_n)$  (3) будут близки к частоте  $k f_0$  и фазе  $\varphi_k$  одной из гармоник ( $k$ -ой) периодической составляющей  $x_p(t_n)$  (2) наблюдаемого временного ряда  $x_n = x(t_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (1), то следует ожидать, что степень соответствия между рядами  $\{x_n\}$  и  $\{\tilde{x}(t_n)\}$  будет максимальной.

В качестве меры соответствия между рядами  $\{x_n\}$  и  $\{\tilde{x}(t_n)\}$  принимается квадрат функции:

$$C_N(f, \varphi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(t_n) x^0(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f t_n - \varphi) x^0(t_n), \quad (4)$$

где

$$x^0(t_n) = x(t_n) - \bar{x}; \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n). \quad (5)$$

Таким образом,  $\{x_n^0 = x^0(t_n)\}$  — центрированный временной ряд.

Величина  $C_N(f, \varphi)$  лишь постоянным множителем отличается от коэффициента корреляции последовательностей  $\{\tilde{x}(t_n)\}$  (3) и  $\{x^0(t_n)\}$ . Поэтому найденные по методу периодограмм значения фундаментальных частоты  $f_0$  и фазы  $\varphi_0$  периодической составляющей  $\{x_p(t_n)\}$  (3), доставляющие максимум квадрату функции  $C_N(f, \varphi)$ , доставляют также максимум модулю коэффициента корреляции рядов  $\{\tilde{x}(t_n)\}$  (3) (пробное гармоническое колебание) и  $\{x^0(t_n)\}$  (5) (центрированный исходный временной ряд).

Для выявления в исходном временном ряде  $\{x(t_n)\}$  скрытой периодичности необходимо выполнить следующие 2 процедуры:

1. Вариация фазы  $\varphi$  и нахождение такого значения  $\varphi_0$ , при котором имеет место максимум  $C_N^2(f, \varphi)$ .

Из необходимого условия экстремума  $\frac{\partial C_N(f, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$  вытекает, что

$$\operatorname{tg} \varphi_0(f) = V_N(f) / U_N(f), \quad (6)$$

где

$$U_N(f) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f t_n) x^0(t_n), \quad (7)$$

$$V_N(f) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f t_n) x^0(t_n). \quad (8)$$

После преобразования (4) с учетом формулы для косинуса суммы двух аргументов, принимая во внимание (7), (8), получим следующее выражение для  $C_N(f, \varphi)$ :

$$C_N(f, \varphi) = U_N(f) \cos \varphi + V_N(f) \sin \varphi. \quad (9)$$

После подстановки значения  $\varphi_0$ , найденного из (6), в (9) получим такое выражение для максимального значения  $C_N^2(f, \varphi_0(f))$  при любом значении частоты  $f$  из некоторого интервала:

$$C_N^2(f, \varphi_0(f)) \equiv P_N(f) = U_N^2(f) + V_N^2(f). \quad (10)$$

Определенная согласно (10) функция  $P_N(f)$  называется периодограммой и была введена Шустером при решении проблемы выявления скрытых периодичностей (Шустер, 1898; Шустер, 1906).

2. Аналитическое определение такого значения частоты  $f$ , при котором достигается максимум периодограммы  $P_N(f)$  (10), в общем случае намного сложнее, чем подбор подходящей фазы  $\varphi_0$ , как это было сделано в п. 1.

На практике вычислялись значения периодограммы  $P_N(f)$  в интересующем нас диапазоне частот (периодов) с некоторым шагом дискретизации  $\Delta f$  по частоте с использованием дискретного или быстрого преобразования Фурье (ДПФ или БПФ) для реализации процесса  $x(t)$  на некотором ограниченном временном интервале (Гайес, 1996; Ошпенгейм, Шафер, 1989; Бендат, Пирсол, 1989; Серебрянников, Первозванский, 1965). Значения частоты, соответствующие локальным максимумам периодограммы  $P_N(f)$ , указывают на вероятные частоты периодичностей, встречающихся в наблюдаемом временном ряде  $\{x(t_n)\}$ .

### 3 Оценивание значимости пиков периодограммы

Выделение в заданном интервале частот максимумов периодограммы не означает, что обнаружена истинная периодичность. Случайная составляющая  $\xi(t)$  процесса  $x(t)$  (1), с непрерывным спектром может внести значительные флуктуации в периодограмму  $P_N(f)$ , пики которых при первом рассмотрении могут быть неотличимыми от пиков гармонических компонент. Поэтому производилось оценивание достоверности выявления гармонических компонент (Серебренников, Первозванский, 1965) по периодограмме или, иными словами, оценивалась значимость максимумов периодограммы (Теребиж, 1992). Эта проблема корректно решается лишь в случае различения пиков периодограммы, порожденных гармоническими компонентами, от пиков, обусловленных слабокоррелированной случайной составляющей, близкой к белому шуму. Поэтому для оценки значимости наблюдаемого на некоторой частоте  $f_m$  максимума периодограммы  $P_N(f_m)$  рассматривается случайный временной ряд (белый шум), заведомо не содержащий никаких периодичностей, и находится вероятность  $q_m$  того, что периодограмма случайного ряда на какой-либо частоте превзойдет  $P_N(f_m)$ . Если  $q_m < q$  — некоторого принятого уровня значимости, то максимум периодограммы является значимым и обнаруженная в ряду периодичность является реальной.

При таком допущении в (Теребиж, 1992) получено следующее ограничение на значение пика  $P_N(f_m)$  в периодограмме, соответствующего обнаруживаемой на частоте  $f_m$  периодичности при уровне значимости  $q$

$$P_N(f_m) \geq P_{NW} = \sigma^2 \frac{1}{N} \ln \frac{N-2}{2q}, \quad (11)$$

где  $\sigma$  — среднееквадратичное значение ряда  $x_n = x(t_n)$  ( $n = \overline{1, N}$ ),  $P_{NW}$  — значения пика в периодограмме, порожденное белым шумом с вероятностью  $q$ .

Из (11) получим оценку вероятности  $q_W$  того, что значение пика  $P_N(f_m)$  периодограммы могло быть порождено белым шумом, т.е. вероятность того, что  $P_N(f_m)$  не значимо с точки зрения отнесения его к периодической составляющей:

$$q_W = \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \exp \left( -N \frac{P_N(f_m)}{\sigma^2} \right) \approx \frac{N}{2} \exp \left( -N \frac{P_N(f_m)}{\sigma^2} \right). \quad (12)$$

Величина  $1 - q_W$  характеризует степень достоверности порождения пика  $P_N(f_m)$  скрытой периодичностью на частоте  $f_m$ , т.е. выражает значимость найденной периодической составляющей.

### 4 Оценивание спектральной плотности методом периодограмм

Периодограмма временного ряда используется для вычисления оценки спектральной плотности мощности методом периодограмм. Значения частот локальных максимумов периодограммы совпадают со значениями частот локальных максимумов оценки спектральной плотности.

В настоящей работе методом периодограмм вычислялась неглаженная оценка односторонней спектральной плотности (Бендат, Пирсол, 1989), представляемая элементами массива  $G_k$ , согласно следующему соотношению:

$$G_k = \frac{2 \Delta t}{N} |X_k|^2, \quad k = \begin{cases} 1, nfft/2 + 1 & (nfft - \text{четное}) \\ 1, (nfft + 1)/2 & (nfft - \text{нечетное}) \end{cases}, \quad (13)$$

где  $\Delta t$  — шаг дискретизации процесса  $x(t)$  по времени,  $\{X_k\}$  — коэффициенты Фурье ряда  $\{x(t_n)\}$ , вычисляемые с помощью БПФ,  $nfft$  — количество временных отсчетов, используемых при вычислении БПФ.

Значение  $nfft$  выбиралось не меньшим, чем  $N$ , представляемым целой степенью числа 2. В частности, с целью обеспечения разумного компромисса между достаточно высокой разрешающей способностью периодограммного анализа по частоте (периодам) и умеренной размерностью вектора

коэффициентов Фурье,  $nfft$  было выбрано равным значению удвоенной целой степени числа 2, ближайшей к  $N$  сверху. При реализации алгоритма БПФ в случае, если  $nfft > N$ , из исходного массива данных временного ряда длиной  $N$  формировался вспомогательный массив длиной  $nfft$ , полученный в результате разбавления исходного массива необходимым количеством значений 0.

Элементы  $X_k$  вектора коэффициентов Фурье вычислялись с помощью алгоритма БПФ в соответствии с соотношением

$$X_k = \sum_{n=1}^N x_n \exp\left(-i \frac{2\pi k n}{N}\right) \quad \left(k = \overline{1, nfft/2 + 1}\right). \quad (14)$$

Коэффициенты Фурье (14) и оценки спектральной плотности (13) находились в частотном диапазоне  $[0; f_{Nyquist}]$ , где  $f_{Nyquist}$  — частота Найквиста — максимальная частота в спектре дискретизованного процесса  $x(t)$  с шагом  $\Delta t$ , выражающаяся следующим образом через частоту дискретизации  $f_s$  и  $\Delta t$ :

$$f_{Nyquist} = f_s/2 = 1/(2\Delta t). \quad (15)$$

С учетом знания оценок спектральной плотности  $G_k$  определялась средняя мощность процесса  $P_{f_1 f_2}$  в заданном диапазоне частот  $[f_1; f_2] \subseteq [0; f_{Nyquist}]$  (в диапазоне периодов  $[T_1; T_2]$ , где  $T_1 = 1/f_2$ ;  $T_2 = 1/f_1$ ) следующим образом:

$$P_{f_1 f_2} = \Delta f \sum_{k=k_1}^{k_2} G_k = \frac{f_s}{2(nfft/2 + 1)} \sum_{k=k_1}^{k_2} G_k, \quad (16)$$

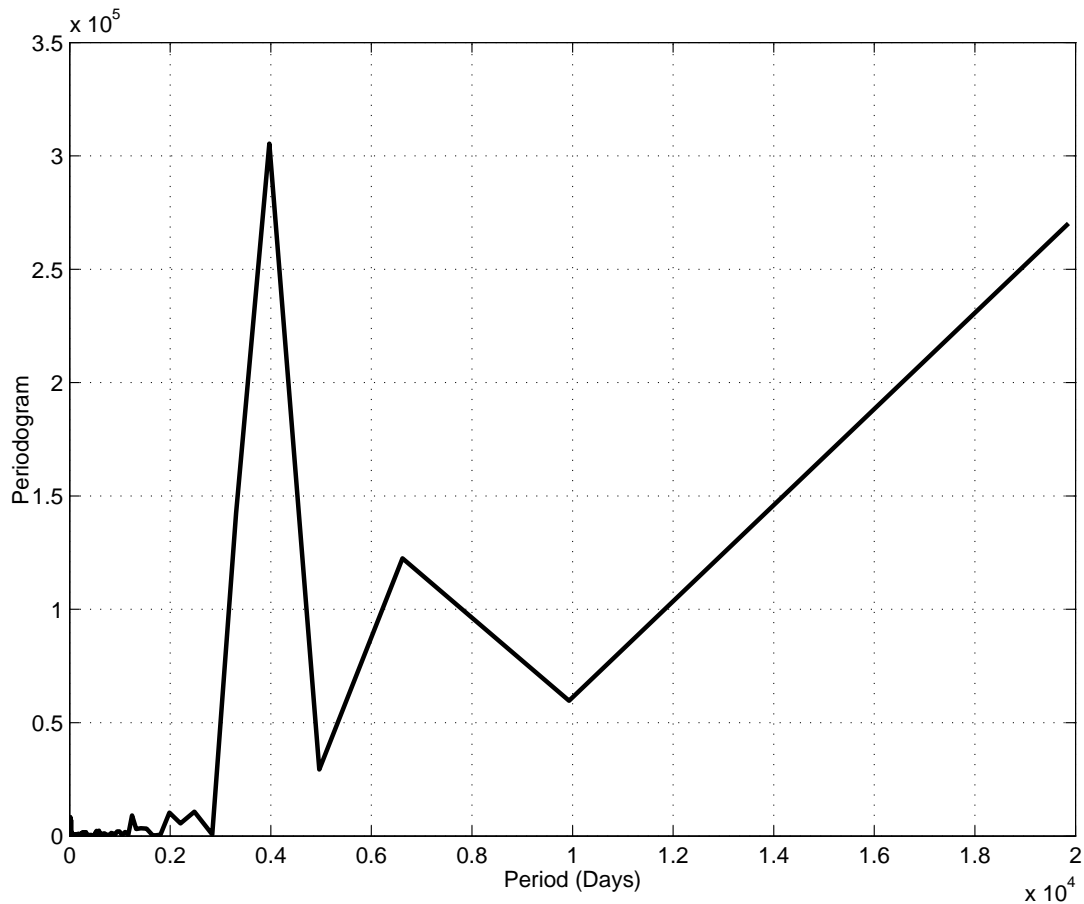
где  $\Delta f = \frac{f_s}{2(nfft/2 + 1)}$ ;  $k_1 = \text{round}\left(\frac{f_1}{\Delta f}\right) + 1$ ;  $k_2 = \text{round}\left(\frac{f_2}{\Delta f}\right) + 1$ , а  $\text{round}(\cdot)$  — операция округления значения соответствующего аргумента до целого.

В алгоритмах БПФ или ДПФ применительно к временному ряду конечной длины выполняется так называемое финитное преобразование Фурье (Бендат, Пирсол, 1989). Эту процедуру можно рассматривать как преобразование Фурье бесконечного временного ряда, умноженного на некоторую функцию прямоугольного временного окна, которая равна 1 на временном интервале, совпадающем с реализацией временного ряда, и равна 0 на остальных интервалах. Применение финитного преобразования Фурье приводит в частотной области к просачиванию энергии с частот, далеких от главного максимума спектрального представления прямоугольного временного окна, через так называемые его боковые максимумы. Для устранения этого эффекта просачивания энергии применяется временное сглаживание, которое сводится к умножению конечного временного ряда на некоторую оконную функцию (например, функцию окна Хампа, Хамминга, и др.). Метод оценивания спектральной плотности с использованием временного сглаживания и реализацией соотношений (14), (13) называется методом модифицированных периодограмм.

## 5 Выбор метода анализа временных рядов, соответствующих 26 годам наблюдений

Оценивание вращения солнечных структур состояло в определении периодов вращения и распределения пиков спектральной плотности мощности на найденных периодах, а также суммарной мощности в заданных интервалах периодов в зависимости от гелиографической широты. Для решения этой проблемы использовались методы спектрального анализа временных рядов, при реализации которых имели место следующие параметры дискретизации и Фурье-анализа (для метода периодограмм, метода Уэлча):

- Количество отсчетов в каждом временном ряде —  $N = 357 \times 360 = 128520$
- Шаг дискретизации по времени —  $dt = 27,2753/360 = 0,07576572$  (суток)
- Длина временного ряда в сутках —  $T = N \times dt = 9737,41$  (суток)
- Частота дискретизации —  $f_s = 1/dt = 13,19875491$  (1/сутки)



**Рис. 1.** График зависимости оценки спектральной плотности по методу периодограмм, от величины периода в диапазоне периодов  $[0; 2000]$  суток в пятиградусной широтной зоне с верхней широтой  $20^\circ$  для активных областей

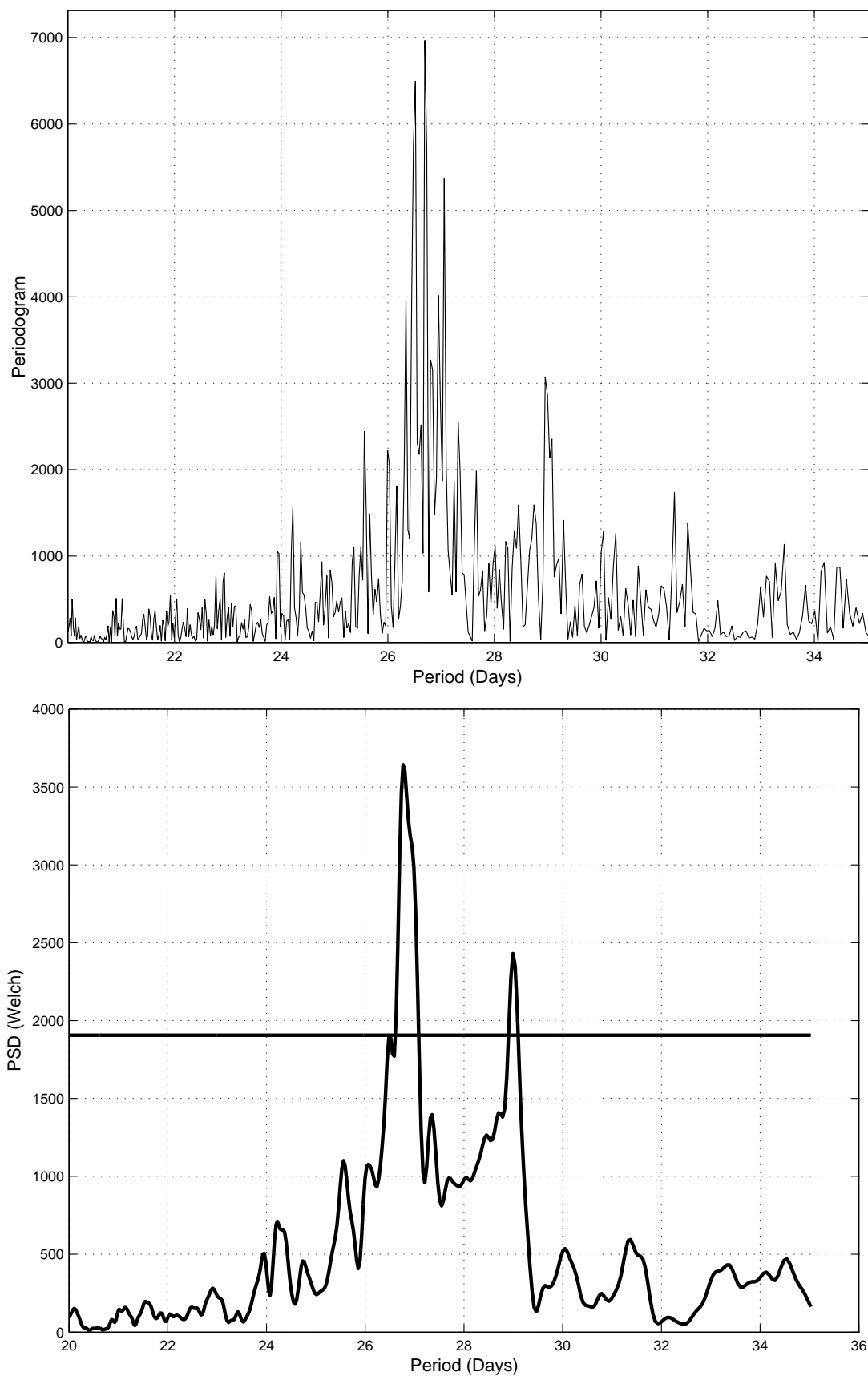
Частота Найквиста —  $nyquist = 1/2fs = 6,599377$  (1/сутки)

Количество временных отсчетов, подвергающихся БПФ —  $nfft = 262144$

Количество частотных отсчетов (коэффициентов Фурье) —  $M = nfft/2 + 1 = 13107$

На рис. 1 и 2а изображены графики зависимостей оценки спектральной плотности, полученной в соответствии с (14) и (13) по методу периодограмм, от величины периода (обратной частоте) в диапазонах периодов  $[0; 2000]$  и  $[20; 35]$  суток соответственно в пятиградусной широтной зоне с верхней широтой  $20^\circ$  для активных областей. Все последующие рисунки даны для того же наблюдательного материала.

Из рис. 1 видно, что по временному ряду длиной 9737.41 методом периодограмм можно оценивать спектральную плотность лишь до значений периодов (обратных частоте), не превышающих 1986.1 суток, что составляет менее четвертой части длины временного ряда. Этот факт следует из теоремы Котельникова (Найквиста). Он связан также с выбором количества отсчетов, подвергающихся БПФ —  $nfft = 262144$ , равному числу, являющемуся степенью числа 2, ближайшему сверху к удвоенному значению количества временных отсчетов ряда  $N = 128520$ . Обеспечение значения  $nfft = 262144$  осуществляется за счет разбавления ряда длиной  $N = 128520$  отсчетов “нулевыми” отсчетами до длины, равной  $nfft$ .



**Рис. 2.** Графики зависимостей оценки спектральной плотности по методу периодограмм (а), и по методу Уэлча (б) от величины периода в диапазонах периодов [20; 35] суток

На рис. 1 видны четкие пики периодограммы, которые соответствуют таким значениям периодов в сутках: 3972 — абсолютный максимум (10,8 (~ 11) г.); 6620 — второй по величине (18,1 г.); 2483 (6,8 г.); 1986 (5,4 г.); 1286 (3,5 г.); 584 (1,6 г.); 326 (0,9 г.); 261 (0,7 г.); 147 (0,4 г.); 101 (~ 3 мес.); 69 (~ 2 мес.); 39 (~ 1 мес.) и др.

Оценка спектральной плотности по методу периодограмм в зависимости от периода (обратного частоте) в диапазоне периодов [20; 35] суток изображена на рис. 2а. Наблюдается сильно изрезанная периодограмма, что обусловлено высокой разрешающей способностью спектрального анализа и отсутствием сглаживания оценки.

Значительная длина временного ряда на всем интервале наблюдений позволяет применить для уменьшения дисперсии оценки спектральной плотности мощности, исходя из простоты реализации и обеспечивающейся при этом достоверности (Теребиж, 1992; Уэлч, 1967). Метод Уэлча состоит в разбиении всего временного ряда на пересекающиеся временные сегменты, вычислении на каждом из сегментов модифицированных периодограмм со сглаживанием окном и получении, в качестве оценки спектральной плотности, усредненных сглаженных периодограмм по всем сегментам. Использовалось разбиение временного ряда длиной 128520 отсчетов на 3 на 50% пересекающиеся временные сегменты длиной 64260 отсчетов каждый и сглаживание в каждом сегменте с применением окна Hamming. Такая оценка по Уэлч-методу является более гладкой, чем оценка по методу периодограмм.

На рис. 2б представлена оценка спектральной плотности мощности в спектре для пятиградусной широтной зоны для интервала периодов 20–35 суток, полученная с помощью метода Уэлча. Горизонтальная линия соответствует уровню  $3 \sigma_{Sp}$ , где  $\sigma_{Sp}$  — среднеквадратичное отклонение оценки спектральной плотности, представленной на графике, как случайной функции частоты. Из сравнения рис 2а и 2б видно, что оценка спектральной плотности по методу Уэлча обладает существенно меньшей дисперсией, чем оценка по методу периодограмм, что выражается в большей гладкости кривой на рис. 2б по сравнению с кривой на рис. 2а. Максимальный пик оценки по методу Уэлча практически в 2 раза меньше, чем пик оценки по методу периодограмм. Суммарные мощности в интервале периодов [20; 35] суток, вычисленные по спектральным плотностям, отображенным на рис. 2а и 2б практически совпадают. Указанные свойства оценки спектральной плотности по методу Уэлча делают ее использование более предпочтительным при оценивании периодичностей по пикам спектральной плотности для длинных рядов, с которыми мы как раз имеем дело, рассматривая наблюдательный материал для 26 летнего временного интервала. Найденные по гладкой оценке спектральной плотности по методу Уэлча периодичности базируются на более усредненных данных, чем они получались бы на основании оценки спектральной плотности по методу периодограмм.

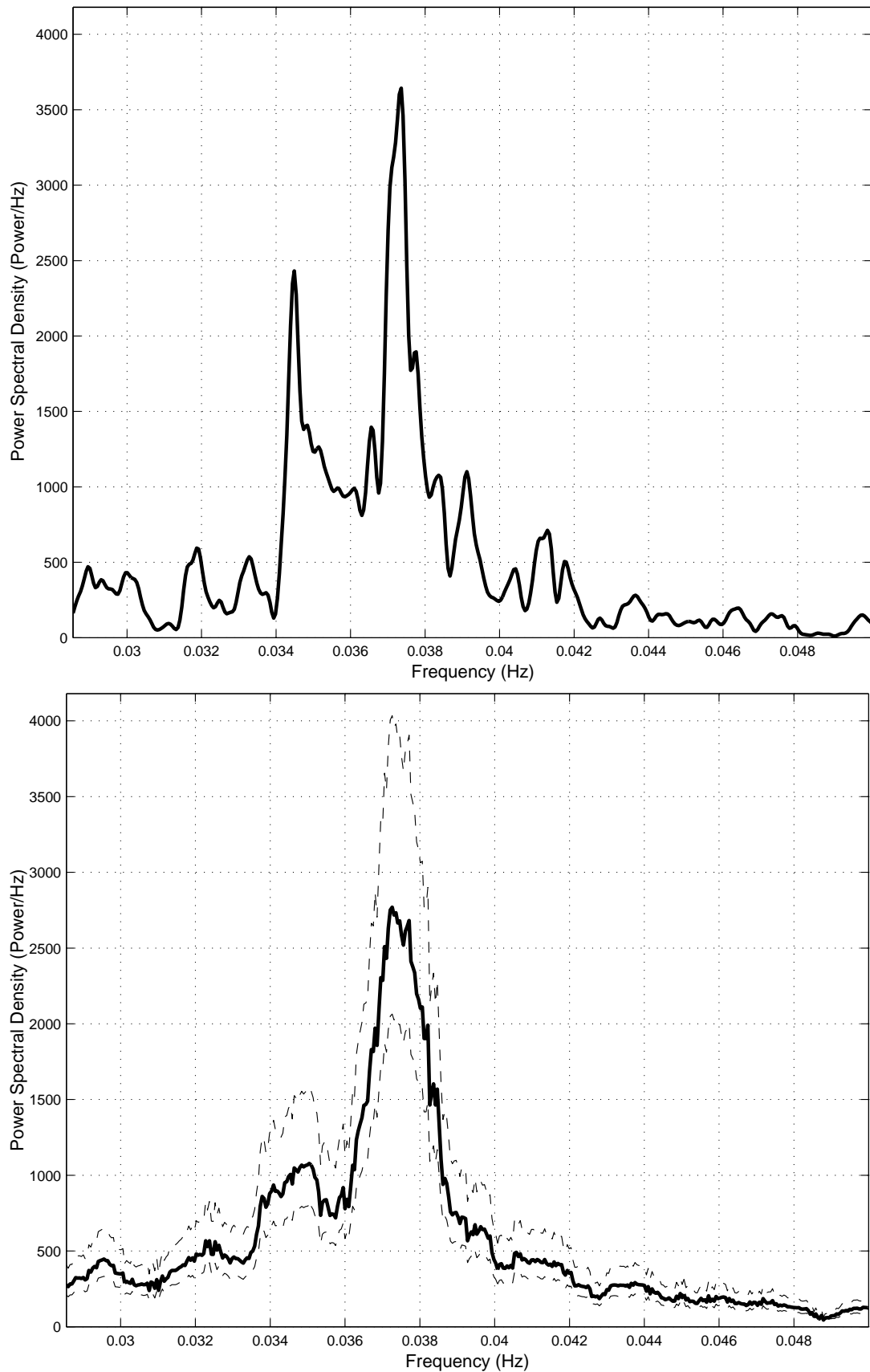
Точки локальных максимумов на графиках, изображенных на рис. 1, рис. 2а,б дают значения вероятных периодов вращения солнечных структур по результатам наблюдений Солнца в линии He 1083 нм. Найденные пики периодограмм подвергались процедуре оценивания достоверности отнесения их к порожденным периодическими составляющими, т.е. оценивалась их значимость. При этом достаточно оценить значимость самых малых из интересующих нас пиков.

Оценим значимость пиков периодограммы, например, в диапазоне периодов [20; 35] суток, для оценки, полученной с помощью метода Уэлча (см. рис. 2б). Задавшись вероятностью  $q = 0,01$  того, что значение пика  $P_{N \min}$  порождено белым шумом, при вычисленном по временному ряду значении  $\sigma = 11,83$  согласно (11) получим следующую оценку:  $P_{N \min} = 0,017$  (условных единиц).

Анализ пиков периодограммы на графике на рис. 2б приводит к выводу, что все пики порождены гармоническими составляющими, а не случайными флуктуациями, так как значение минимального пика оценки спектральной плотности, имеющее место для значения периода 20,6 суток составляет 29,99 условных единиц и значительно превышает оцененное значение  $P_{N \min}$ .

Оценим также согласно (12) вероятность  $q_W$  того, что какой-нибудь из наименьших пиков периодограммы (рис. 2б) мог быть порожден случайной флуктуацией. Выбрав наименьший пик периодограммы 29,99, соответствующий периоду 20,6 суток в соответствии с (12) получим  $q_W = 0$  при вычислении в MATLAB с использованием 64-разрядных вещественных переменных.





**Рис. 3.** Графики зависимостей оценки спектральной плотности по методу Уэлча (а), и по методу мультизаострений (б) от частоты в диапазоне частот  $[0,028; 0,05]$  (1/сутки) (диапазоне периодов  $[35; 20]$  суток) в пятиградусной широтной зоне

Таким образом, оцененные пики периодограммы с высокой степенью достоверности порождены скрытыми периодичностями.

Пусть  $\hat{T}_i = 1/\hat{f}_i$  — оценка периода ( $\hat{f}_i$  — частоты) выявленной скрытой периодичности, соответствующая значимому пику периодограммы. Как значение  $\hat{T}_i$ , так и значение  $\hat{f}_i$  совпадает с одним из отсчетов на шкале периодов и, соответственно, на шкале частот. Определим минимальные половинные отклонения от  $\hat{T}_i$  в меньшую и большую стороны соответственно на шкале периодов как  $\Delta T_{-i}$  и  $\Delta T_{+i}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta T_{+i} &= 1/2 [T_{i+1} - \hat{T}_i] ; \\ \Delta T_{-i} &= 1/2 [\hat{T}_i - T_{i-1}] ,\end{aligned}\tag{17}$$

где  $T_{i-1} = \frac{1}{f_{i+1}}$ ;  $T_{i+1} = \frac{1}{f_{i-1}}$ ;

$$f_{i-1} = \hat{f}_i - \Delta f; \quad f_{i+1} = \hat{f}_i + \Delta f; \quad \Delta f = \frac{fs}{2(nfft/2 + 1)} .\tag{18}$$

После определения отклонений от  $\hat{T}_i$  согласно (15) с учетом (16) можно определить интервал

$$\left[ (\hat{T}_i - \Delta T_{-i}) ; (\hat{T}_i + \Delta T_{+i}) \right],\tag{19}$$

которому принадлежит истинное значение периода выявляемой гармонической составляющей.

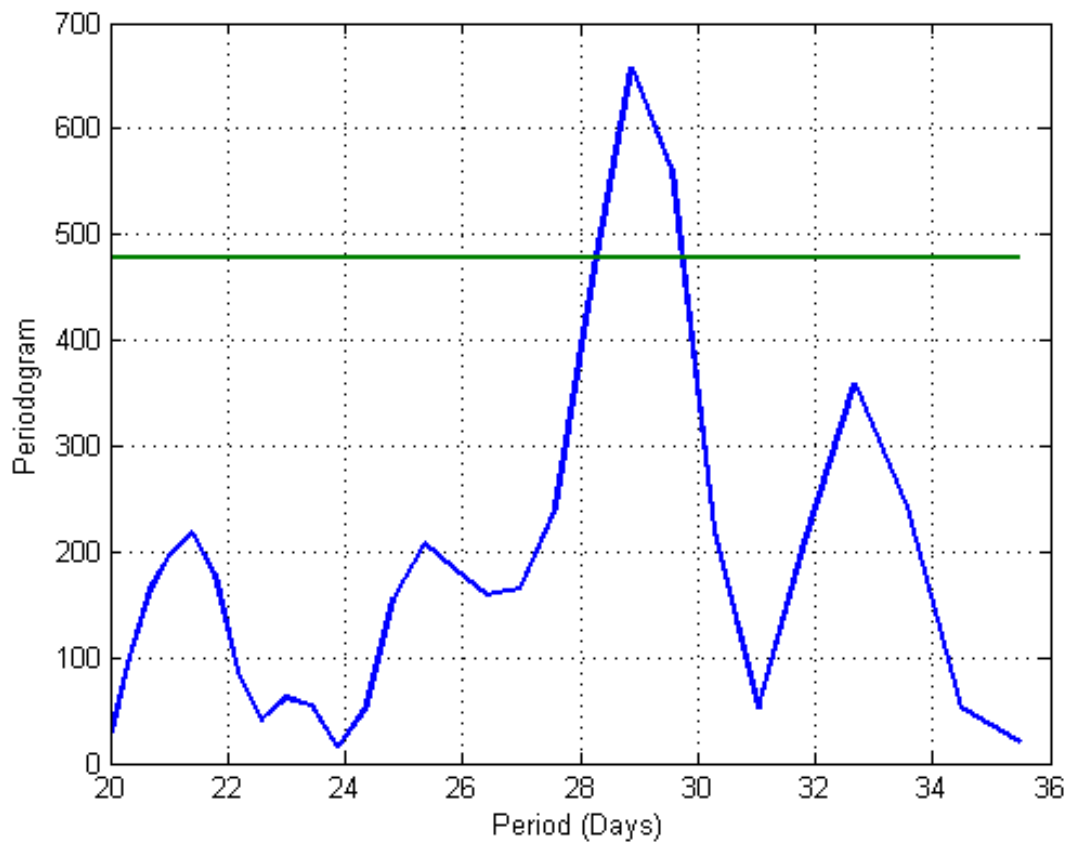
Определим погрешности оценивания периода вращения 26,7672 суток в пятиградусной широтной зоне, оценка которого соответствует максимальному пику на графике на рис. 2б, а значение пика равно 3643,04.

Оценке периода  $\hat{T}_i = 26,7672$  суток соответствует оценка частоты  $\hat{f}_i = 1/\hat{T}_i = 0,0374$ . Шаг дискретизации по частоте, вычисленный согласно последнему из соотношений (16), составляет  $\Delta f = 5,0350 \times 10^{-4}$  1/сутки. Используя эти данные при вычислениях согласно (16) и (15), получим следующие выражения для погрешностей оценивания периода

$$\Delta T_{+i} = 0,1665 ; \quad \Delta T_{-i} = 0,1910.$$

Таким образом, истинное значение одного наиболее мощного периода вращения принадлежит интервалу  $[26,5762; 26,9337]$ , определенному согласно (19).

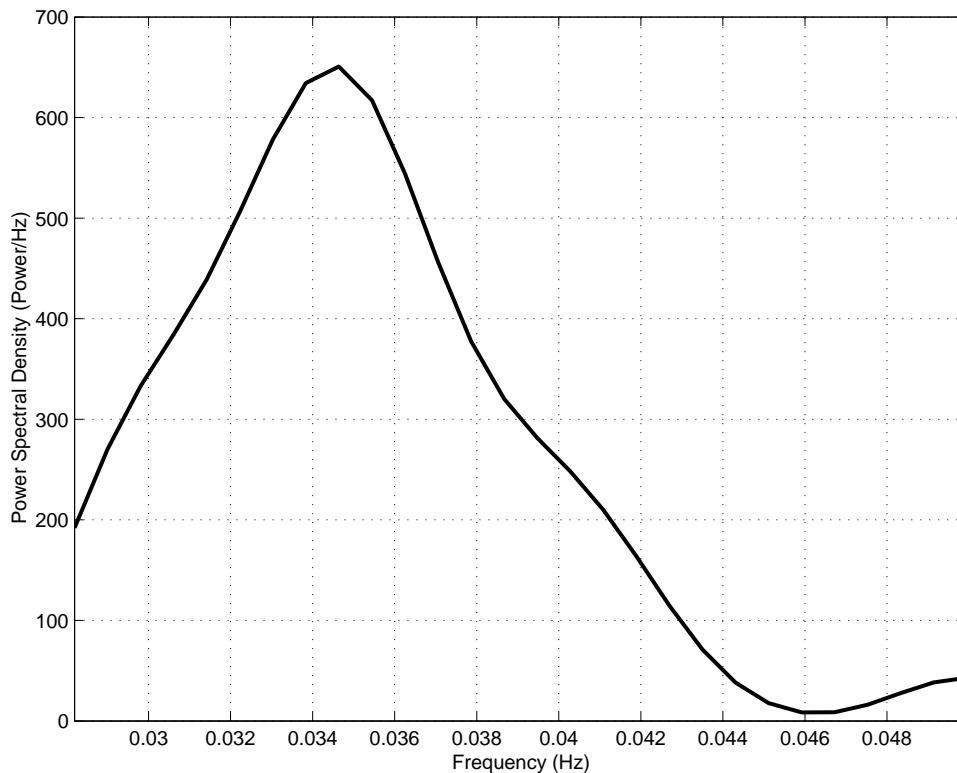
С целью обеспечения компромисса между требованиями высокой разрешающей способности, позволяющей выявить тонкую структуру истинного спектра (узкие выбросы) и низкой дисперсии оценки спектральной плотности был исследован и применен метод мультизаострений (Персивал, Валден, 1993). В этом методе при оценивании спектра используются группы линейных или нелинейных комбинаций модифицированных периодограмм (комбинации оптимальных фильтров в частотной области) и не используются временные окна сглаживания, выбор которых достаточно субъективен. Эти периодограммы вычисляются на основании данных временного ряда с использованием его разложения по ортогональным дискретным протяженным сфероидальным последовательностям (DPSS, иначе – Slepian-sequences). Использовалось разложение не по одной (как в традиционном Фурье-анализе), а по 15, 7, 5, 2 последовательностям таких базисных функций, причем 15 последовательностей использовались для спектрального анализа рядов на 26-летнем периоде наблюдений, а остальные из перечисленных количеств последовательностей тестировались при спектральном анализе на годичном скользящем временном интервале. В качестве оценки спектральной плотности при реализации метода мультизаострений берется результат усреднения по количеству применяемых дискретных сфероидальных последовательностей периодограмм, каждая из которых вычислена по своей последовательности базисных функций. Естественно, из-за усреднений такая оценка обладает малой дисперсией, т.е. является гладкой и не нуждается в сглаживании. Она является удобной для исследования каких-нибудь глобальных



**Рис. 4.** График зависимости оценки спектральной плотности по методу периодограмм от величины периода в диапазоне периодов [20; 35] суток по результатам оценивания в годичном временном интервале

свойств спектральной плотности, для оценивания суммарной мощности в некотором диапазоне периодов. Для оценивания периодичностей, соответствующих пикам оценки спектральной плотности оценка по методу мультизаострений мало пригодна.

На рис. 3 отображены графики зависимостей оценки спектральной плотности по методу Уэлча (а), и по методу мультизаострений (б) от частоты в диапазоне частот [0,028; 0,05] (1/сутки) (диапазоне периодов [35; 20] суток) в 5°-й широтной зоне с верхней широтой 20° для AR. Из сравнения рис. 3а и 3б виден похожий характер зависимостей оценок спектральной плотности от частоты для метода Уэлча и метода мультизаострений и нахождение их в тех же диапазонах значений. На рис. 3б средняя кривая соответствует оценке спектральной плотности по методу мультизаострений, а верхняя и нижняя пунктирные кривые отображают зависимости 90% нижнего и верхнего доверительных интервалов для истинного значения оценки спектральной плотности от частоты. Из рис. 3б видно, что оценка спектральной плотности по методу мультизаострений является существенно более гладкой, чем оценка по методу Уэлча, и поэтому она мало пригодна для оценивания периодичностей, соответствующих пикам.



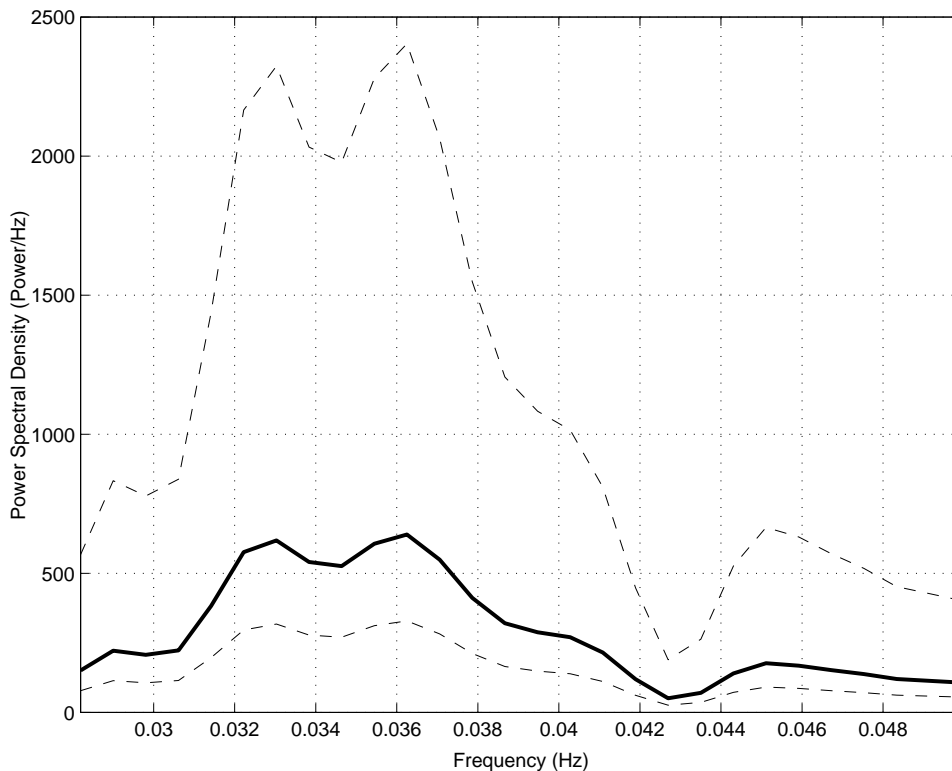
**Рис. 5.** График зависимости оценки спектральной плотности по методу Уэлча от частоты в диапазоне периодов [20; 35] суток по результатам оценивания в годичном временном интервале

## 6 Выбор метода анализа временных рядов для годичных интервалов наблюдений

Ниже приведены результаты оценивания спектральной плотности на базовом интервале спектрального анализа 1 год со сдвигом при скольжении на полгода до прохождения всего 26-летнего интервала наблюдений в пятиградусной широтной зоне.

График зависимости оценки спектральной плотности по методу периодограмм от величины периода в диапазоне периодов [20; 35] суток в пятиградусной широтной зоне по результатам оценивания в годичном временном интервале изображен на рис. 4. Границы 365-дневного скользящего интервала были выбраны произвольно, в частности это был интервал [4015; 4380] суток из полного временного интервала наблюдений [0; 9737,41] суток (почти 26 лет). Горизонтальная линия соответствует уровню  $3\sigma_{Sp}$ , где  $\sigma_{Sp}$  — среднеквадратичное отклонение оценки спектральной плотности, представленной на графике как случайной функции частоты. Таким образом, эта периодограмма обладает одним статистически значимым пиком.

На рис. 5 и 6 отображены графики зависимости оценки спектральной плотности по методу Уэлча (рис. 5) и методу мультизаострений (рис. 6) от частоты в диапазоне периодов [20; 35] суток в пятиградусной широтной зоне по результатам оценивания в годичном временном интервале. При реализации метода Уэлча (рис. 5) использовалось разбиение части временного ряда длиной в 1 год на 3 на 50% пересекающиеся временные сегменты (3 наполовину пересекающиеся сегмента — это минимум) и сглаживание в каждом сегменте с применением прямоугольного окна. Сравнивая рис. 5 с рис. 4 (с учетом того, что на рис. 5 на оси абсцисс — шкала частот, а на рис. 4 — шкала периодов), видим, что оценка спектральной плотности по методу Уэлча на коротком годичном



**Рис. 6.** График зависимости оценки спектральной плотности по методу мультизаострений от частоты в диапазоне периодов [20; 35] по результатам оценивания в годичном временном интервале

интервале обладает всего одним максимумом, в отличие от более реальной оценки по методу периодограмм (рис. 4). Таким образом, метод Уэлча для оценивания периодичностей на коротком годичном интервале не пригоден. Анализируя рис. 6 и рис. 4, можно сделать аналогичный вывод о непригодности метода мультизаострений для оценивания периодичностей в скользящем годичном временном окне из-за чрезмерной гладкости оценки спектральной плотности.

## 7 Заключение

Рассмотрение методов спектрального анализа для оценивания вращения солнечных структур позволяет сделать следующие выводы.

Для исследования зависимости вращения от широты по интервалам в 26 лет и три года мы выбрали метод Уэлча. Эффективность применения этого метода обусловлена значительной длиной рядов в указанных временных интервалах. Использование разбиения временных рядов на 3 на 50% пересекающиеся временные сегменты (3 таких пересекающихся сегмента – это минимум) и сглаживания в каждом сегменте с применением окна Hamming позволило получить существенно более гладкие оценки спектральной плотности, чем методом периодограмм Шустера. При этом периоды, соответствующие значимым пикам оценки спектральной плотности, превышающим  $3\sigma_{Sp}$ , найденные по методу Уэлча, практически совпали с периодами, обнаруженными на сильно изрезанной оценке спектральной плотности, оцененной по методу периодограмм. Суммарные же мощности в заданных интервалах периодов, найденные по оценкам спектров мощности по методу Уэлча и по методу периодограмм, также практически совпадали.

С целью возможного согласования требований высокой разрешающей способности и низкой дисперсии оценки спектральной плотности в случаях рядов в 26 лет и в 3 года был исследован метод мультизаострений. В качестве оценки спектральной плотности при реализации метода мультизаострений берется результат усреднения по количеству применяемых дискретных сфероидальных последовательностей периодограмм, каждая из которых вычислена по своей последовательности базисных функций. Естественно, из-за усреднений такая оценка обладает малой дисперсией, т.е. является гладкой и не нуждается в дополнительном сглаживании. Она удобна для исследования каких-нибудь глобальных свойств спектральной плотности, для оценивания суммарной мощности в некотором диапазоне периодов. Для оценивания же периодичностей, соответствующих пикам оценки спектральной плотности, оценка ее по методу мультизаострений оказывается мало пригодной.

Для оценивания спектральной плотности в случае скользящего спектрального анализа в коротком временном окне длиной 1 год со сдвигом на полгода в выбран метод периодограмм. Метод Уэлча и метод мультизаострений в этом случае оказались непригодными для оценивания периодичностей из-за получающихся с их помощью на таком коротком временном интервале чрезмерно гладких оценок спектральной плотности.

В работе были использованы данные NSO/Kitt Peak, полученные как совместный продукт NSF/NOAA, NASA/GSFC и NOAA/SEL.

## Литература

- Андреева О.А., Зельк Я.И., Степанян Н.Н. // Изв. Крымск. Астрофиз. Обсерв. 2006. Т. 102. С. 84.  
Бендат Дж., Пирсол А. // Прикладной анализ случайных данных. М. Мир. 1989.  
Гайес (Hayes, М.Н.) // Statistical Digital Signal Processing and Modelling. New York: John Wiley & Sons. 1996.  
Оппенгейм, Шафер (Oppenheim A.V., Shafer R.W.) // Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ. 1989. P. 730  
Персивал, Валден (Persival D.B., Walden A.T.) // Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques. Cambridge University Press. 1993.  
Серебренников М.Г., Первозванский А.А. // Выявление скрытых периодичностей. М. Наука. 1965.  
Степанян Н.Н., Андреева О.А., Зельк Я.И. // Изв. Крымск. Астрофиз. Обсерв. 2007. Т. 103. (в печати).  
Теребиж В.Ю. // Анализ временных рядов в астрофизике. М. Наука. 1992.  
Уэлч (Welch P.D.) // IEEE Trans. Audio Electroacoustics, Vo 1. AU-15 (June 1967). P. 70.  
Шустер (Schuster A.) // Terrest. Magn. 1898. V. 3. P. 13  
Шустер (Schuster A.) // Proc. Roy. Soc. 1906. V. 77. P. 136.