

УДК 523.98

Метод восстановления непрерывности массива данных для проведения Фурье-анализа

А.В. Брунс

НИИ “Крымская астрофизическая обсерватория”, 98409, Украина, Крым, Научный

Поступила в редакцию 14 февраля 2006

Аннотация. В соответствии с Фурье-преобразованием, временная функция протекания некоего процесса может быть представлена определенным пакетом гармонических составляющих, которые несут в себе полную информацию об исходном массиве.

В случае потери в исходном массиве, в силу каких-то причин, части данных в спектральном изображении, кроме имевшихся ранее гармоник, отражающих изучаемый процесс, появятся дополнительные гармонические составляющие, отображающие появившийся пропуск. Они засоряют спектр дополнительными максимумами, не имеющими никакого отношения к изучаемому процессу. Количество дополнительных гармоник зависит от количества и продолжительности пропусков данных и может достигать значительной величины.

Очевидно, что если каким-то образом узнать параметры прерванных гармоник и восстановить непрерывность отдельно каждой из них, то удастся устранить прерывность всего массива и соответственно засоренность спектра.

Конечно, такой синтезированный массив не будет точной копией исходного массива до прерывания, т.к. он не сможет восстановить данные наблюдения, имевшие место во время разрыва массива. Смысл подобной операции состоит в другом: устранить разрывность в имеющейся части данных и получить возможность произвести обработку полученного массива как единого целого без появления ложных максимумов.

Предлагается метод восстановления непрерывности массива данных наблюдений путем устранения разрыва отдельно каждой его гармонической составляющей. Метод создавался для обработки рядов яркости солнечного излучения с целью регистрации его, так называемых, 5-ти минутных осцилляций. Яркость измерялась в течение каждой световой части суток и естественно прерывалась на ночное время. Но метод может найти применение и в других случаях Фурье-обработки прерывающихся рядов данных.

Ключевые слова: Фурье преобразование, разрывы в данных наблюдений, восстановление непрерывности массивов данных.

1 Введение

Понятие о разложении Фурье можно считать общеизвестным. Отметим лишь свойства, которые являются основополагающими, и на которые мы будем ссылаться при дальнейшем рассмотрении вопроса.

1) В силу линейности преобразования Фурье, спектр суммы функций равен сумме спектров всех отдельно взятых функций слагаемых.

Если $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$, (1a)

то
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \times y(t) \times dt = S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_3(\omega)$$
 (2b)

2) Фурье-преобразование функции $y(t)$ может быть представлено в координатах времени как пакет тригонометрических функций – гармоник, суперпозиция которых равна исходной функции. Фурье-преобразование синусоида есть сама синусоида. Прерывание $y(t)$ эквивалентно прерыванию каждой из составляющих его гармоник.

3) Число гармоник и их частоты полностью определяются длительностью – T обрабатываемого массива и дискретностью времени отсчетов (“дискрет” времени). Все функции $y(t)$, имеющие одинаковую продолжительность и “дискрет” времени, имеют одинаковые наборы гармоник по их количеству и значению частот.

4) Всё многообразие функций $y(t)$ создается заданием для каждой i -ой гармоники только двух постоянных коэффициентов: амплитуды – A_i и фазы – φ_i , которые не меняются на всем ее протяжении, равном длительности преобразуемой временной функции.

В соответствии с Фурье-преобразованием, функция $y(t)$ может быть представлена пакетом гармонических составляющих, определяемых выражением:

$$y(t) = a_0 / 2 + \sum_{i=1}^{i=I} A_i \cdot \cos(2\pi * \frac{t * i}{T} - \varphi_i)$$
 (2)

здесь: T – длительность обрабатываемого массива, i – номер гармоники, A_i – ее амплитуда, φ_i – ее фаза, I – индекс максимальной частоты гармоники для данного массива.

На рис.1 представлены $F1$ и $F3$ – две части исходного массива AD , прерванного между точками B и C . Эти части расположены на одном векторе времени и имеют протяженность $nt1$ и $nt3$. Отмеченные на оси абсцисс точки соответствуют дискретным моментам времени, в которые проводились замеры величин массивов и гармоник.

В промежутке между двумя частями прерванного массива должен находиться массив-вставка $F2$. В соответствии со свойствами 1) и 2), для каждой отдельной гармоники этот массив представлен отрезком синусоиды. На рисунке показана некоторая i -ая гармоника с периодом $1/\omega_i$ в виде непрерывной синусоиды, проходящей на рисунке внутри частей массива. В рассматриваемом нами случае участок синусоиды между точками B и C массива отсутствует и нам не известен (потому показан пунктиром). В разрыв условно помещен отрезок произвольной синусоиды-вставки F_{vst} , продолжительностью n_{vst} , периодом – $1/\omega_{i,vst}$, имеющий случайную амплитуду и фазу (исходно не согласованные с первыми двумя массивами).

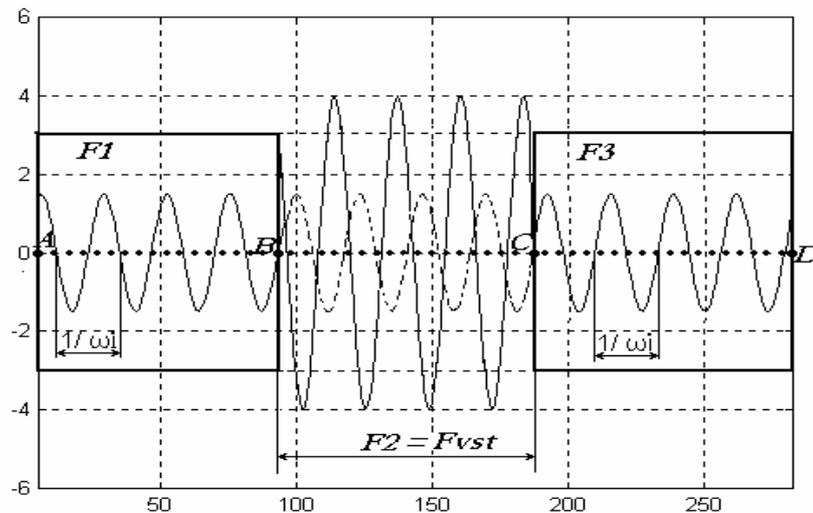


Рис. 1.

Для приведения отрезка этой синусоиды-вставки к виду, показанному пунктиром, необходимо решить следующие задачи:

- Привязать значения соединяемых массивов и синтезируемого массива-вставки к соответствующим дискретным значениям общего вектора времени.
- Установить частоты синусоид-вставок равными частотам текущих гармоник при Фурье-анализе исходного массива до появления в нем разрыва.
- Найти фазы соответствующих гармоник соединяемых массивов и согласовать с ними фазы синусоид-вставок.
- Найти амплитуду каждой из гармоник в соединяемых массивах и принять равной ей амплитуду в синтезируемом массиве-вставке.

2 Синтез массива-вставки

2.1 Привязка к единому вектору времени

В случае соединения частей массива наблюдений, из-за потери части данных в силу каких-то причин и ставшего разрывным, привязка к единому вектору времени выполняется автоматически, т.к. соединяемые части массива создавались на одном векторе времени. Функция массива-вставки задается аналитически для каждой гармоники и временная привязка моментов измерений в файле-вставке к дискретным значениям вектора времени производится в процессе дискретизации значений функции файла-вставки.

2.2 Выбор частот

Из рис. 1 следует, что отрезок синусоиды-вставки должен иметь частоту текущей гармоники. Для рассматриваемого случая, искомая функция $F(t)$ при нахождении каждой i -ой гармоники, должна состоять из 3-х частей: отрезка этой гармоники — $F1$, находящегося в первой части массива от точки A до точки B , далее от точки B до точки C $F2$ — синусоида-вставка, а от точки C до D — отрезок — $F3$ этой же гармоники, находящейся в третьей части массива. Первый и третий отрезки — исходно когерентны.

В общем виде, на основании свойства 1) и 2), выражение результирующего массива для i -ой гармоники будет иметь вид:

$$F_i(t) = F1_i(t) + A_{t,i} \sin(\omega_{i,vst}t + \varphi_{i,j}) + F2_i(t) \quad (3)$$

Здесь: ω_i – угловая частота i -ой гармоники в стыкуемых массивах, $F2_i(t)$
 $A_{t,i}$ – амплитуда i -ой гармоники в векторе-вставке,
 j – индекс изменения фазы,
 $\varphi_{i,j} = \Delta\varphi_i * j$ – j -ое значение фазы i -ой гармоники,
 $\Delta\varphi_i$ – дискретность приращения фазы.

Спектральный состав функции $F_i(t)$ – от нулевой частоты до частоты Найквиста, определяется длиной массива и дискретом времени (см. свойство. 3)). На основании свойства (4) частота синусоиды-вставки должна быть равна частоте текущей гармоники – $\omega_{i,vst} = \omega_i$, но нам неизвестна ее фаза.

2.3 Определение фазы

В простейшем случае, когда сигнал не обременен мультипликативными помехами, фаза может быть определена сканированием $\varphi_{i,j}$ в (3). Рассмотрим, как выглядит спектр гармонического ряда (3) при разных значениях фазы – $\varphi_{i,j}$. Будем для каждой гармоники в массиве-вставке $F2$, последовательно присваивать дискретно меняющиеся в пределах 2π значения фазы – $\varphi_{i,j}$ и при этом, проводя дискретное преобразование Фурье, вычислять соответствующие коэффициенты i -ой гармоники для всего массива $F_i(t)$. На рис. 2 показан участок спектра 3,31 – 3,36 мГц, который содержит 11 точек. Для наглядности картины размер и расположение центра окна выбран так, чтобы в центре находился максимум текущей “ i ”-ой гармоники массива, для которой сейчас производится расчет.

При плавном повороте фазы в файле-вставке, происходит изменение амплитуды гармоники всего массива $F(t)$ от A_{min} до A_{max} . Из всего набора семейства кривых на рисунке представлено три кривых, при которых амплитуда принимает три характерных значения:

- 1) максимальная амплитуда – при фазе гармоники-вставки, согласованной с соответствующими гармониками соединяемых массивов;
- 2) некоторое промежуточное значение;
- 3) минимальная амплитуда – в случае их противофазы.

Максимум амплитуды $A_{i,max}$ для каждой гармоники-вставки соответствует оптимальному согласованию значения фазы – $\varphi_{i,opt}$.

В случае присутствия в обрабатываемом сигнале мультипликативного шума повысить точность определения фазы возможно интерполяцией исходного массива, или воспользоваться более сложным методом – применением преобразования Гильберта [1]. Рассмотрение применения этих методов выходит за пределы данной работы.

2.4 Определение амплитуды

Для расчета требуемой амплитуды, по аналогии с понятием “количества движения”, используемым в механике, применим понятие “количеством колебания” – Kk , определяемое как интеграл амплитуды колебания – A по времени его продолжительности – nt .

$$Kk = \int_0^{nt} A \cdot dt$$

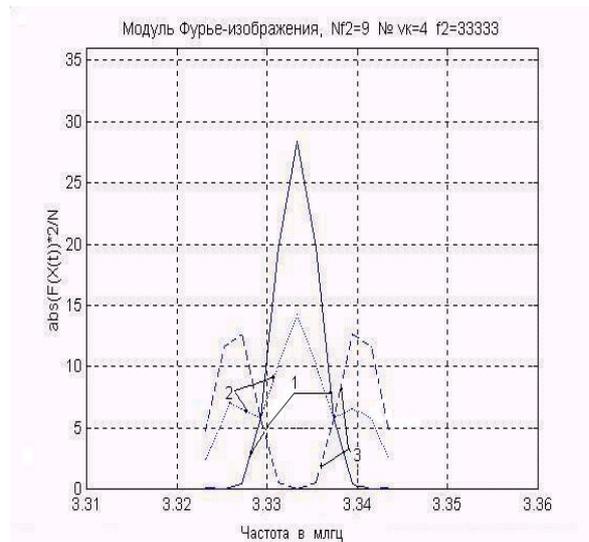


Рис. 2.

или, учитывая, что амплитуда гармоники в файле постоянна, – $Kk_i = A_i * nt_i$.

Тогда, для случая трех массивов можно записать уравнение количества колебания для i -ой гармоники, при колебании файла-вставки “в фазе” с файлами данных

$$A_i * (nt1 + nt2) + A_{t,i} * nt_{vst} = A_{i,max} * (nt1 + nt2 + nt_{i,vst}) \quad (4)$$

Уравнение при колебании файла-вставки в “противофазе” с файлами данных для i -ой гармоники, имеет вид:

$$A_i * (nt1 + nt2) - A_{t,i} * nt_{i,vst} = A_{i,min} * (nt1 + nt2 + nt_{i,vst}) \quad (5)$$

здесь: A_i – амплитуда i -ой гармоники в частях исходного массива,

$A_{t,i}$ – амплитуда тестового сигнала вставки,

$A_{i,max}$ – максимальная амплитуда i -ой гармоники, найденная при изменении фазы,

$A_{i,min}$ – минимальная амплитуды i -ой гармоники,

$nt1$, $nt3$ и nt_{vst} – продолжительность соответственно 1-ого, 2-ого массивов и массива-вставки.

Из уравнений (4) и (5) вычислим A_i . – значение амплитуда i -ой гармоники в частях исходного массива. Так как амплитуда гармоники постоянна на всем ее протяжении, то такой же должна быть принята амплитуда вставки: $A_{i,vst} = A_i$

$$A_{vst,i} = \frac{(A_{i,max} + A_{i,min}) \times nt_{vst}}{(A_{i,max} - A_{i,min}) \times (nt1 + nt2)} \times A_{t,i} \quad (8)$$

Или в общем виде для любого количества соединяемых массивов амплитуда всех вставок для i -ой гармоники должна быть равной:

$$A_{vst.i} = \frac{(A_{i,max} + A_{i,min}) \times \sum_{L} nt_{vst}}{(A_{i,max} - A_{i,min}) \times \sum_{K} nt} \times A_{i,i} \quad (9)$$

Здесь: $\sum_{K} nt$ – общая продолжительность соединяемых частей массивов данных,

$\sum_{L} nt_{vst}$ – продолжительность промежутков (вставок),

K – количество соединяемых частей массива данных,

$L=K-1$ – количество соединяемых массивов вставок,

$A_{vst.i}$ – амплитуда вставки i -ой гармоники.

3 Пример применения описанного метода сшивки разрывных рядов наблюдений

Для демонстрации работы метода был синтезирован массив данных с заведомо известным спектром. Он состоит из трех частей и получен из отрезка синусоиды, прерванного в двух местах участками с принудительно обнуленным значением амплитуды. Таким образом, выполнено условие: исходный массив состоит из частей, входящих в единый временной массив. С целью приближения синтетического массива к реальности в него введен аддитивный шум, представляющий собой массив случайных чисел со значениями элементов в интервале от 0 до шести максимальных значений амплитуды элементов исходного массива и распределенными по времени равномерно в размере исходного массива.

На рис. 3а представлен исходный массив, состоящий из трех частей. На рис. 3б тот же массив, но с введенным шумом. На рис. 3с показаны два места стыковки: 1-ого исходного массива и 3-ого массива с участками, на которых отсутствуют данные.

Для наглядности масштаб по оси абсцисс растянут в обе стороны относительно точек, отмеченных крестиками.

На основании изложенных принципов, с учетом всех сформулированных условий, была разработана компьютерная программа. После загрузки соединяемых массивов она, восстанавливая непрерывность всего массива, выполняет для каждой гармоники следующие операции:

1) В соответствии с (3), составляет обрабатываемый массив вводя в промежутки между исходными файлами синусоиды-вставки с частотой вычисляемой гармоники и с произвольно выбранной тестовой амплитудой A_{ti} . На рис. 3д показаны места стыковки исходного массива и участков с тестовой синусоидой.

2) Дискретно с выбранным шагом поворачивает на 360° фазу синусоиды-вставки.

3) Для каждого значения фазы φ_{ij} производит Фурье-преобразование составленного массива и вычисляет значение амплитуды текущей гармоники.

4) Находит максимальное и минимальное значение амплитуды $A_{i,max}$ и $A_{i,min}$, а также значение фазы $\varphi_{i,opt}$ соответствующее $A_{i,max}$.

5) По (8) вычисляет для каждой гармоники амплитуду $A_{i,vst}$ и, с учетом $\varphi_{i,opt}$, строит для нее синусоиду-вставку. На рис. 3е показаны места стыковки исходного массива и участков с синусоидой-вставкой, имеющей найденные программой амплитуду и фазу.

7) Суммируя синусоиды-вставки для всех гармоник на общем векторе времени, получает массив-вставку для согласованного соединения частей исходного массива.

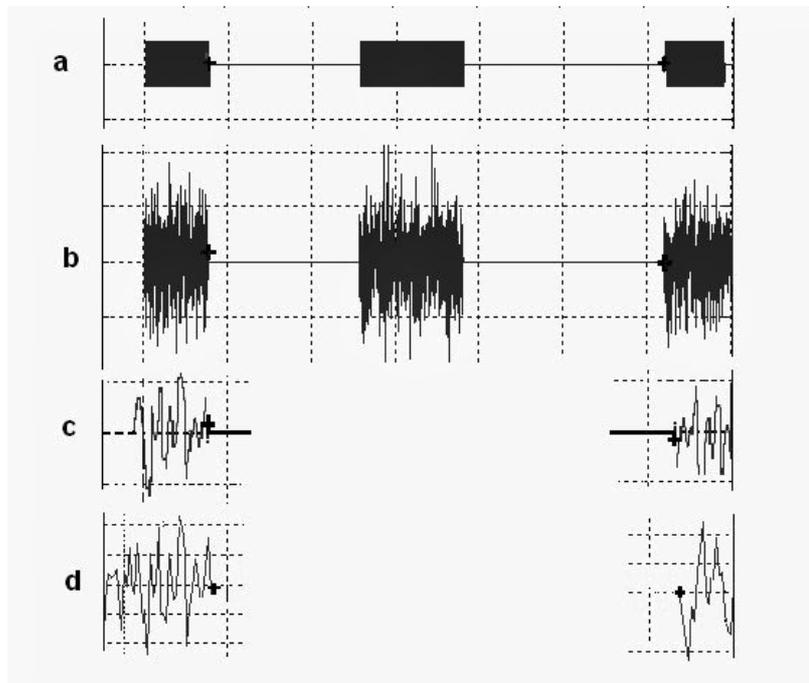


Рис.3.

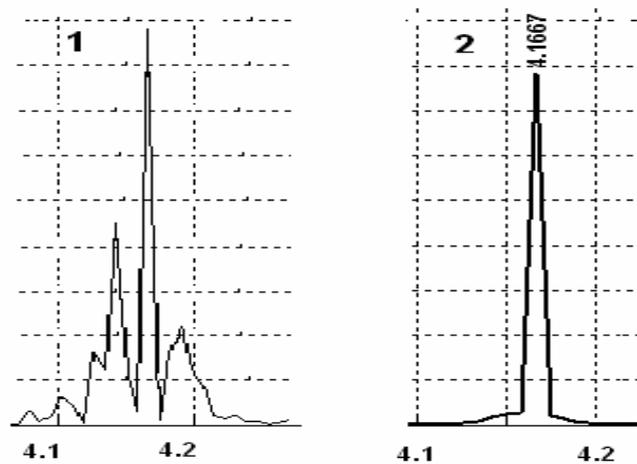


Рис.4.

В расчете были приняты следующие значения параметров, входящих в расчетные формулы:

- Амплитуда сгенерированного сигнала..... $A_i=4$,
- Частота модельного сигнала в Гц..... $fr_0=12,5/3$,
- Амплитуда шума..... $A_{sh}=A_i*6$,
- Амплитуды тестового сигнала $A_{t,i}=A_i*0.1$,
- Найденная программой амплитуда сигнала $A_{i,vst}=4,0\pm 0.15$,
- Обрабатываемое спектральное окно в индексах..... $ab=14$,
- Дискретность фазы при сканировании..... $K=3^0$.

На рис. 4 приведены: 1 – участок спектра массива до обработки; 2 – участок спектра массива с восстановленной непрерывностью по изложенной выше методике.

Литература

- Васильев В.В., Гуров И. // Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам, СПб. БХВ. Санкт-Петербург. 1998.
- Дьяконов В., Круглов В. // Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник. – СПб. Питер. 2002.
- Сергиенко А.Б. // Цифровая обработка сигналов. СПб. Питер. 2006.
- Харкевич А.А. // Спектры и анализ. Гос. издательство технико-теоретической литературы. Москва 1957.