Изв. Крымской Астрофиз. Обс. 109, № 1, 115−121 (2013)

ИЗВЕСТИЯ
КРЫМСКОЙ
АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ
ОБСЕРВАТОРИИ

УДК 521.131

О геометрических моделях в системе «Солнце – планета – спутник»

Г.С. Курбасова

НИИ «Крымская астрофизическая обсерватория», Научный, АР Крым, Украина, 98409
gskurb@gmail.com

Поступила в редакцию 27 декабря 2012 г.

Аннотация. В настоящей работе на примере развиваемого автором геометрического подхода обсуждается связь реального пространства и отношений масс взаимодействующих тел в небесной механике. В основе построенных геометрических моделей лежит отождествление реальных отношений протяженностей и отношений физических величин с абстрактными геометрическими структурами. Относительные величины масс спутник/планета, вычисленные геометрическим методом, отличаются от вычисленных динамическим методом на основе данных о движении космических аппаратов менее чем на 0.01 %.

GEOMETRIC MODELS IN THE SYSTEM “SUN – PLANET – SATELLITE”, *by G.S. Kurbasova*. The aim of this paper is an attempt to draw attention and show the example developed by the author of a geometric approach to the relationship of the real space with mass ratios of interacting bodies in celestial mechanics. The basis of a geometrical model is the identification of real ratios of extensions and ratios of physical quantities with abstract geometric structures. Relative mass values of satellite/planet calculated by the geometric method differ from those obtained by the dynamical method on the base of data on the motion of space vehicles by less than 0.01 %.

Ключевые слова: пространство, спутник, планета, масса, Солнце

1 Введение

Еще древние греки понимали, что в структуре Вселенной воплощены геометрические принципы, первичным компонентом которых является пространство. «…План, по которому построена Вселенная, имеет математический характер – и только математика позволяет открыть этот план.

Первой научной школой, предложившей свой вариант «математизированного плана» строения Вселенной, были пифагорийцы, возглавляемые Пифагором Самосским (около 585–500 гг. до н. э.) [движения планет пифагорийцы сводили к числовым отношениям].
…Современная наука разделяет пифагорийскую приверженность числу…; современные теории представляют собой гораздо более искусную форму пифагоризма» (Клайн, 2007).

Все основные достижения последних столетий связаны с галилеевско-ньютоновской парадигмой научного познания: опыт-гипотеза-опыт-закон-опыт. Основу ее составляют абстрактные модели. Одной из таких абстрактных моделей, удобной для описания явлений в природе и обществе, является геометрия Евклида. Необходимость более точного описания объектов и явлений природы привело к введению дополнительных характеристик моделей пространства. Одной из таких характеристик пространства является размерность, впервые описанная Пуанкаре следующим образом:

«…Если для разделения континуума C достаточно рассмотреть в качестве сечений определенное количество различных элементов, мы говорим, что размерность такого континуума равна единице… Если же… для разделения континуума достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, равной единице, мы говорим, что размерность C равна двум. Если достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов, с размерностью, не превышающей двух, мы говорим, что размерность континуума C равна трем…» (Мандельброт, 2002).

Из вышесказанного следует определение размерности в евклидовом E-пространстве: точка имеет размерность 0 (ее нельзя разделить, так как она не является континуумом); размерность кривых равна 1; размерность плоскости равна 2; пространство является континуумом с размерностью, равной 3.

Однако уже в конце XIX в. два выдающихся открытия: канторово однозначное соответствие между точками прямой и плоскости и непрерывное отображение интервала на всю площадь квадрата, продемонстрированное Пеано, показали, что, во-первых, размерность можно менять однозначным преобразованием и, во-вторых, с помощью однозначного преобразования размерность можно увеличить.

Эти два открытия расширили диапазон размерностей, используемых в моделях для описания объектов и явлений природы, от атомных масштабов до Вселенной. Необходимость уточнения моделей побуждала ученых интуитивно приспосабливаться к реальной действительности путем расширения понятия размерности в направлении согласования геометрического и физического пространства (морфология, четырехмерное пространство и др.).

В этом отношении самыми выдающимися можно считать работы Б. Мандельброта. Написанная им в 1975 книга «Фрактальная геометрия природы» в настоящее время считается стандартным справочником по фракталам (Мандельброт, 2002).

В настоящей работе показано, что согласованность реального геометрического и физического пространств в системе «планета – спутник» можно описать, используя простые геометрические структуры.

2 Абстрактные структуры в реальном пространстве «планета – спутник»

Один из трех постулатов планетарного движения, сформулированных И. Кеплером на основе наблюдений Тихо Браге, состоит в том, что планеты в Солнечной системе движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам.

Применение простой геометрической модели в этом случае привело к огромным научным достижениям как в вычислении орбит, так и в развитии точных последующих теорий движения планет и их спутников.

Движения спутников по кеплеровским эллиптическим орбитам подвержено действию различных возмущающих сил (сжатия планеты, притяжения Солнца, притяжения других планет).

Как следствие, планеты и спутники могут существовать только в определенной области расстояний от ведущего тела, внутренняя поверхность которой для больших спутников зависит от разрушающего взаимодействия приливных сил, а внешняя определяется условиями стабильности орбит под возмущающим действием Солнца (Акснес, 1980).

О принадлежности небесных тел Солнечной системе свидетельствуют общие крупномасштабные физические и геометрические характеристики. В то же время индивидуальные свойства, присущие ведущему и ведомому телам (Солнце – планета, планета –

спутник), определяют их пространственное положение и связи. В пространстве существования системы «Солнце – планета – спутник» формируются устойчивые пропорции между средними физическими и геометрическими параметрами, обусловленные динамическими законами. Эти пропорции обеспечивают устойчивые геометрические конфигурации в виде абстрактных структур.

В науке о строении Вселенной все чаще встречаются взгляды на абстрактные структуры, естественно возникающие в рамках различных формализмов, как на объективные сущности, которые имеют прямое отношение к реальности окружающего мира. Об изменениях отношения взгляда математиков на отношения с естественными науками свидетельствует, в частности, и известная полемика В.И. Арнольда с представителями «школы Бурбаки» (Арнольд, 1998, 1999).

Абстрактные структуры представляют собой геометрический аналог реального объекта, его геометрическую модель, степень сложности которой определяется условиями решаемой задачи. Примером абстрактной элементарной структуры, лежащей в основе фигуры, называемой «Деревом Пифагора», является прямоугольный треугольник. В линейном евклидовом пространстве в применении к прямоугольному треугольнику справедлива теорема Пифагора.

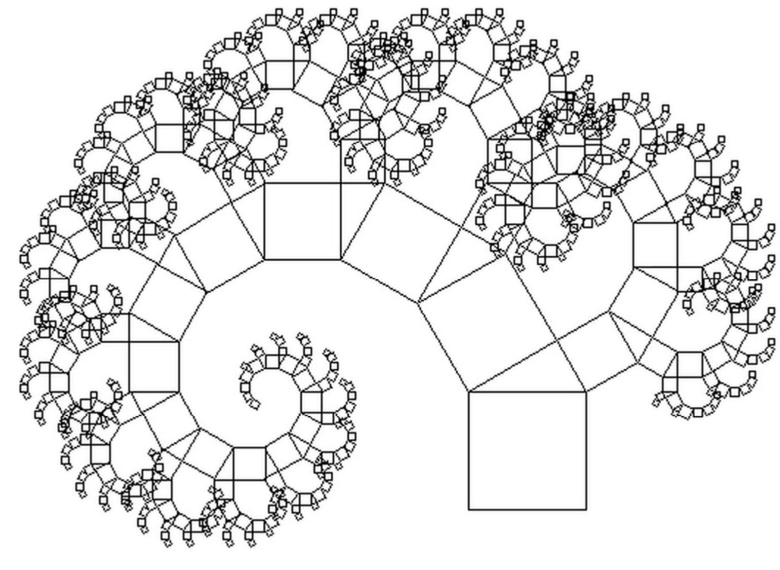

Рис. 1. «Дерево Пифагора» (http://ru.wikipedia.org/wiki/Дерево_Пифагора)

Основу «Дерева Пифагора» представляет евклидова структура – прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1. В этом случае с помощью рекурсивной процедуры можно построить фигуру, состоящую из самоподобных элементов, обладающих свойством масштабной инвариантности (см. рис. 1).

На каждом уровне построения этой фигуры сумма площадей квадратов, построенных на катетах, тоже будет равна единице. В данном случае имеет место полное повторение базовой формы во все более и более уменьшенном виде. Периметр такого треугольника на любом этапе итераций равен $P = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha$, где α – угол между большим катетом и гипотенузой. Угол α полностью определяет геометрическую структуру и внешний вид «Дерева Пифагора».

В реальном пространстве подобным абстрактным структурам соответствуют некоторые статические геометрические конфигурации, которые возникают в результате повторяемости событий. Одной из таких структур в пространстве «Солнце – планета», «планета – спутник» является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого соединяет центры масс ведущего и ведомого тела, а малый катет равен экваториальному радиусу ведомого тела. В результате повторяемости относительных положений ведущего и ведомого тел параметры этой структуры изменяются относительно некоторого среднего положения, определяемого средним расстоянием между их центрами масс. При этом отношение периметра соответствующего прямоугольного треугольника к величине среднего расстояния между центрами масс двух взаимодействующих тел является периметром P абстрактной структуры, который не зависит от единиц измерения. Эквивалентность построенных таким образом абстрактных структур в пространстве двух взаимодействующих тел представляет собой случай, отличный от эквивалентности различных линейных протяженностей в евклидовом пространстве. Расширение этого понятия на отношения масс связано с анализом размерностей, которые, наряду с целочисленными значениями в пространстве (E^1, E^2, E^3), приобретают дробный характер.

3 Геометрический аналог отношений масс, параметр локального пространства D

Геометрический аналог представления отношений масс описан автором в предыдущих публикациях (Курбасова, 2007). В этих работах показано, что в определенном представлении отношение масс (ведомого тела к ведущему) эквивалентно некоторому абстрактному математическому образу. Так, если отношение масс планета/спутник обозначить буквой $\mu\varepsilon$ и представить в виде следующего выражения:

$$\gamma = \sqrt{1+4\ \left(\frac{1+\mu\varepsilon}{1-\mu\varepsilon}\right)^2}, \tag{1}$$

то можно установить однозначное соответствие вида:

$$thx = \frac{\gamma}{4} \tag{2}$$

или

$$\frac{\gamma}{4} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}, \tag{3}$$

где $2x$ – площадь, ограниченная ветвями равнобочной гиперболы вида $x^2 - y^2 = 1$.

Из (1)–(3) следует, что для определения отношения масс (спутник/планета) достаточно определить геометрическую величину $D = 2x$.

В этом случае отношение масс взаимодействующих тел определяет геометрический параметр D локального пространства «планета – спутник». Приведенные ниже модели для определения параметра D представляют собой простые комбинации соответствующих абстрактных периметров.

Так, для системы «Земля – Луна»

$$D_0 = \frac{2\ln P_2}{\ln(3-\kappa^{D_1})}, \tag{4}$$

где k – отношение экваториальных радиусов Луны и Земли, а $D_1 = 4 - \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, P_1, P_2 – периметры структуры «Солнце – Земля» и «Земля – Луна» соответственно. Число $D_0 \approx \ln 6 / \ln 4$ устанавливает тождественность отношений геометрических и физических характеристик локального пространства системы «Земля – Луна». Ранее автором были установлены связи между средними элементами орбит и некоторыми геометрическими характеристиками физических тел Земли и Луны с использованием γ в качестве преобразующего коэффициента (Курбасова, 2004).

Для системы «Юпитер – галилеевы спутники» переход от пространства абстрактных геометрических конфигураций к отношению масс возможен согласно выражению (3), если величину $D = 2x$ для каждой пары «Юпитер – спутник» вычислить по формуле:

$$D_i = \frac{2\ln P_i}{\ln(Z_i)}, \tag{5}$$

где индексы i = I, II, III, IV соответствуют спутникам Юпитера: Ио, Европа, Ганимед, Каллисто, а знаменатели Z_i вычисляются по формулам:

1) $Z_{\mathrm{I}} = 2 * P_{\mathrm{I}} - P_{\mathrm{II}}/2 - [(P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{IY}})/2 - (P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}})/2] * 10^{-2}$, (Юпитер – Ио); (6)

2) $Z_{\mathrm{II}} = 1 + (P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}})/2 + [(P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{III}})/4] * 10^{-3}$, (Юпитер – Европа); (7)

3) $Z_{\mathrm{III}} = 1 + (P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{IY}})/2 + [(P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{IY}})/3 - P_{\mathrm{III}}]/4$, (Юпитер – Ганимед); (8)

4) $Z_{\mathrm{IY}} = (2 * P_{\mathrm{J}} - 1) + [(P_{\mathrm{IY}}/2 - 1)/2] * 10^{-3}$, (Юпитер – Каллисто). (9)

В уравнении (9) величина P_J – периметр системы «Солнце – Юпитер».

Абстрактная конфигурация в пространстве движения спутников Юпитера формируется под влиянием связей: три внутренних галилеевых спутника находятся в резонансном взаимодействии с резонансной переменной вида $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$, колеблющейся близ значения 180°.

В пространстве четырех галилеевых спутников автором статьи установлены следующие целочисленные геометрические взаимосвязи:

$$P_{II} + P_{III} + 3P_{IV} - 2P_I = 6, \ \Delta = 0.52 \cdot 10^{-7} \ ; \tag{10}$$

$$r_{II} + r_{III} + 3r_{IV} - 2r_I = 0, \ \Delta = 0.25 \cdot 10^{-7} \ ; \tag{11}$$

$$Oo_{II}^2 + Oo_{III}^2 + 3Oo_{IV}^2 - 2Oo_I^2 = \frac{3}{4}, \ \Delta = 0.22 \cdot 10^{-7} \ , \tag{12}$$

где P, r, Oo – периметр, радиусы вписанной и описанной окружностей; Δ – абсолютная погрешность (отклонения от целочисленных величин).

Уравнения геометрических связей (10)–(12), в отличие от резонансных связей, включают четвертый спутник – Каллисто.

Конкретные вычисления (см. таблицу) показывают, что величины параметров D, обеспечивающие переход от геометрических структур к отношениям масс, равны (с требуемой точностью) фрактальным размерностям Хаусдорфа-Безиковича (Федер, 1991).

Таблица 1. Отношения масс спутник/планета: $\mu*$ – вычисленные динамическим (JPL, NASA) методом и $\mu\varepsilon$ – геометрическим методом

Планета–спутник	Экваториальный радиус (км)	Среднее расстояние (км)	D	$\mu*$	$\mu\varepsilon$
Земля – Луна	6378.140 1737.5	149 598 022 384 400	1.295 587 189 ~ ln 6/ ln 4	1/ 81.300 = 0.012300123	0.012 300 113
Юпитер	71492	778 547 200	~ ln 4/ ln 3	$\mu^* \cdot 10^5$	$\mu\varepsilon \cdot 10^5$
Ио	1821.3	421 600	1.262 926 841	4.70406	4.70408
Европа	1565	671 000	1.262 870 221	2.52795	2.52833
Ганимед	2634	1 070 400	1.263 007 551	7.80522	7.80520
Каллисто	2408	1 883 000	1.262 951922	5.668	5.668

В таблице приведены: названия планет и спутников, экваториальные радиусы планет и их спутников (JPL, NASA), средние расстояния между центрами масс в системе «планета – спутник» (JPL, NASA), величины параметров D, $\mu*$ – вычисленные динамическим методом отношения масс спутник/планета, $\mu\varepsilon$ – вычисленные геометрическим методом отношения масс. Для ведущих планет приведены величины больших полуосей: Солнце – Земля, Солнце – Юпитер; для Ио – средний экваториальный радиус.

4 Выводы

1. Геометрический метод вычисления отношения масс спутник/планета хорошо согласуется с динамическими законами, определяющими краевые условия области существования ведомого тела.
2. В ограниченной области существования системы «планета – спутник» формируются устойчивые пропорции между физическими и геометрическими параметрами, что обеспечивает индивидуальную структуру локального пространства и возможность определения отношений масс спутник/планета с помощью абстрактных геометрических конструкций.
3. Вычисленные параметры D перехода от геометрических абстрактных структур к отношению масс спутник/планета (см. табл.) – дробные числа, которые характеризуют локальные пространства систем «планета – спутник».

Литература

Акснес К. // Спутники планет. М.: Мир. 1980.
Арнольд В.И. // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. С. 229.
Арнольд В.И. // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169. С. 1311.
Клайн М. // Математика. Утрата определенности. М.: РИМИС. 2007.

Курбасова Г.С. // Изв. Крымск. Астрофиз. Обсерв. 2007. Т. 103. № 4. С. 246.
Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В. // Труды Международной астрономической конференции «Основные направления развития астрономии в России». Казань, сентябрь 21-25, 2004. С. 108.
Мандельброт Б. // Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований. 2002. С. 656.
Федер Е. // Фракталы. М.: Мир. 1991. С. 254.