

УДК 520.2, 520.16

## Исследование волнового фронта при помощи диафрагмы Гартмана в сходящемся пучке

*В.В. Бирюков, В.Ю. Теребиж*

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Россия  
Крымская астрофизическая обсерватория, Украина

Поступила в редакцию 11 августа 2003 г.

**Аннотация.** Предлагается метод изучения aberrаций оптической системы, основанный на анализе изображения совокупности отверстий в диафрагме, установленной на небольшом расстоянии перед фокальной плоскостью. Приводятся необходимые аналитические соотношения, выяснены ограничения на характеристики схемы, описаны алгоритмы численного решения прямой и обратной задач. Последняя рассматривается как статистическая задача оценивания коэффициентов разложения aberrационной функции по системе ортогональных полиномов Цернике. При помощи неравенства Рао – Крамера найдена предельно достижимая точность обратного решения. Модельные примеры показывают, что приемлемая точность восстановления формы волнового фронта достигается в реальных условиях астрономических наблюдений или лабораторного эксперимента. Метод в равной мере применим не только при использовании собственно диафрагмы Гартмана, но и при анализе изображения произвольной маски, установленной в сходящемся световом пучке.

WAVEFRONT TESTING WITH THE AID OF HARTMANN DIAPHRAGM IN CONVERGING BEAM, *by V. V. Biryukov, V. Yu. Terebizh.* The method of investigating of aberrations of optical systems is proposed that is based on placing a small Hartmann diaphragm in converging light beam not far from the focal plane. The corresponding analytical relations and the layout restrictions are given, as well as description of the solution methods of direct and inverse problems. The latter is considered as the statistical problem of estimation of coefficients in expansion of aberration function in Zernike series. The limiting attainable accuracy of estimates is found with the aid of the Rao – Cramer inequality. Model cases show that acceptable accuracy of the wavefront recovery can be attained under conditions of real astronomical observations or laboratory experiment. The method can be applied both with the proper Hartmann diaphragm and arbitrary mask placed in converging light beam.

**Ключевые слова:** Контроль оптики, телескопы.

---

### 1 Введение

Сведения о форме волнового фронта, прошедшего через оптическую систему, нужны обычно либо для выяснения качества этой системы, либо для компенсации искажений, вносимых земной атмосферой. В классическом методе Гартмана (1904) такие сведения получают путем размещения диафрагмы с отверстиями во входном или выходном зрачках системы. Это размещение еще удается

реализовать, если мы имеем дело с астрономической оптикой умеренного размера, однако для больших современных зеркал затруднительно не только изготовить диафрагмы соответствующих размеров, но прежде всего – обеспечить должную стабильность эксперимента (Корнехо-Родригес, 1978; Витриченко, 1980). Кроме того, классическая методика по необходимости медлительна, что исключает ее использование в активной и, тем более, в адаптивной оптике.

Естественный способ преодоления указанных трудностей связан с формированием сравнительно малого выходного зрачка при помощи вспомогательной оптической системы (см., например, Голден, 1975). Отводя в измерительный канал небольшую часть света, такое устройство можно применять даже при частотах порядка сотен герц, характерных для адаптивной оптики. Трудность, и притом серьезная, обусловлена здесь жесткостью допусков на качество и позиционирование дополнительной оптики. Эта проблема решается обычно путем введения референтного волнового фронта, образованного безабберационной системой (Шэк и Платт, 1971; Лойбл, 1980). Подробное обсуждение всего сопутствующего круга вопросов можно найти в книге Вилсона (1999).

В настоящей работе изучается другой путь решения задачи, основанный на размещении небольшой диафрагмы с отверстиями в сходящемся световом пучке недалеко от фокуса оптической системы. Детектор, расположенный по другую сторону от фокуса, регистрирует систему пятен, по которой и восстанавливается информация о волновом фронте. Преимущество такого теста состоит в отсутствии дополнительной оптики. Отверстия в диафрагме не обязательно располагать в узлах какой-либо правильной сетки, достаточно знать их координаты с нужной точностью.

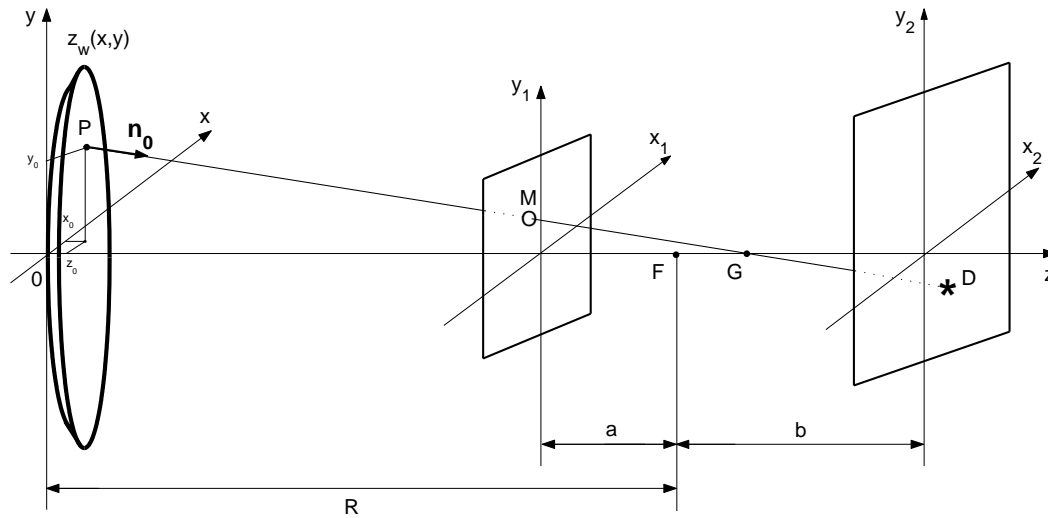
Поскольку диафрагма Гартмана представляет собой один из видов дифракционной решетки, ограничения предлагаемой схемы обусловлены, в основном, дифракцией света на каждом из отверстий и на всей их системе. Невозможность сделать отверстия и расстояния между ними сколь угодно малыми приводит к сравнительной разреженности проекции совокупности отверстий диафрагмы на волновой фронт, отнесенный к выходному зрачку. Тем не менее уже в простейшей схеме эксперимента достигается восстановление всех аберраций третьего порядка с приемлемой точностью. Мы оперируем ортогональными аберрациями Цернике, так что речь идет о первых 11 коэффициентах в номенклатуре Нолла (1976). Дальнейшее развитие эксперимента позволяет выяснить и аберрации более высокой пространственной частоты.

Восстановление волнового фронта в любой схеме контроля оптики представляет собой т.н. *обратную* задачу. Не составляет исключения и тест Гартмана в сходящемся пучке. Мы рассматриваем оценивание характеристик волнового фронта в рамках оккамовского подхода к обратным задачам (Теребиж, 1995а,б). Выясняются допуски на параметры оптической схемы, предельно достижимая точность восстановления волнового фронта и ее зависимость от условий эксперимента, а также коррелированность оценок аберрационных коэффициентов. В дополнение к аналитическому рассмотрению задача изучалась путем компьютерного моделирования.

Компактность обсуждаемой схемы и простота требуемого экспериментального оборудования позволяют надеяться на широкий круг применений. Особенно важны эти свойства в космических экспериментах; в связи с одним из них, проектом “Спектр-УФ”, и был разработан предлагаемый тест.

## 2 Сопоставление с методом Ронки

В обсуждаемой здесь версии теста Гартмана, как и в известном методе Ронки (1964), используется положение контрольного элемента в сходящемся пучке вблизи фокуса исследуемой оптической системы. Принципиальное отличие методов обусловлено тем фактом, что применение решетки Ронки не позволяет однозначно проследить положение проекции каждого из ее элементов на теневой картине. В самом деле, нетрудно отождествить отдельные *линии* искаженной аберрациями теневой картины с их прообразами на самой решетке, но продольные смещения отдельных элементов линий остаются неизвестными. Это касается как регулярной решетки с эквидистантной системой линий, так и специально рассчитанной неравномерной круговой решетки, которая порождает правильную теневую картину в случае совершенной оптики (Теребиж, 1984).



**Рис. 1.** Схема теста Гартмана в сходящемся пучке. Волновой фронт в выходном зрачке системы задается функцией  $z_w(x, y)$ , диафрагма расположена в плоскости  $(x_1, y_1)$  на расстоянии  $a$  от парааксиального фокуса  $F$ , детектор – в плоскости  $(x_2, y_2)$  на расстоянии  $b$  от  $F$ . Отрезок  $FG$  характеризует продольную aberrацию луча, исходящего из произвольной точки  $P$  волнового фронта

По этой причине решетка Ронки может применяться лишь в нуль-тесте, когда регулярность теневой картины служит указанием на высокое качество оптической системы, но отклонения от правильной теневой картины поддаются лишь частичной интерпретации. Конечно, и схема Гартмана может обеспечить нуль-тест в обоих указанных выше вариантах, однако главная ее цель – получить полную информацию о локальных искажениях теневой картины. Эта информация и позволяет решить обратную задачу восстановления формы волнового фронта, прошедшего через систему.

При описании метода Ронки применяются две модели: геометрическая, интерпретирующая теневую картину в рамках геометрической оптики, и физическая модель, согласно которой теневая картина формируется при дифракции света на отдельных полосах и всей их системе. Если частота штрихов не очень высока, то оба подхода приводят к единым результатам (Корнехо-Родригес, 1978). Мы придерживаемся, в основном, геометрической картины, уточняя пределы ее применимости и выбирая оптимальное с точки зрения физической оптики расположение диафрагмы и детектора (см. Раздел 5).

### 3 Основные соотношения

Предположим, что изучаемая оптическая система освещена бесконечно удаленным точечным источником света. Направим ось  $z$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$  вдоль оптической оси системы (Рис. 1). Пусть выходной зрачок системы находится на расстоянии  $R$  от парааксиального фокуса  $F$ , диафрагма Гартмана расположена в плоскости  $z = z_1$ , а приемник света – в плоскости  $z = z_2$  (мы считаем  $z_1 < R < z_2$ ). Обозначим через  $W(x, y)$  aberrационную функцию системы, т.е. отклонение волнового фронта вблизи выходного зрачка от референтной сферы радиуса  $R$ , через  $(x_1, y_1, z_1)$  – координаты произвольной точки  $M$  в плоскости диафрагмы, и через  $(x_2, y_2, z_2)$  – координаты проекции  $D$  этой точки на детектор, осуществляемой световым лучом.

Запишем уравнение волнового фронта в выходном зрачке в виде

$$\begin{cases} z_w = f(x, y), \\ f(x, y) \equiv R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + W(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где первые два слагаемых в  $f(x, y)$  задают сферический фронт, отвечающий идеальной оптической системе. Рассмотрим некоторую точку  $P(x_0, y_0, z_0)$  на волновом фронте; очевидно, для нее

$$z_0 = R - \sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2} + W(x_0, y_0). \quad (2)$$

Компоненты единичного вектора нормали  $\mathbf{n}_0$  к фронту в точке  $P$  равны

$$n_{0x} = -\frac{1}{K_0} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0, \quad n_{0y} = -\frac{1}{K_0} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0, \quad n_{0z} = -\frac{1}{K_0}, \quad (3)$$

где

$$K_0 = \sqrt{1 + \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \right)^2 + \left( \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 \right)^2}. \quad (4)$$

Параметрические уравнения луча вдоль вектора  $\mathbf{n}_0$  имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + n_{0x} t, \\ y = y_0 + n_{0y} t, \\ z = z_0 + n_{0z} t, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty. \quad (5)$$

Из этих равенств можно исключить параметр  $t$ , полагая свободной переменной  $z$ -координату луча:

$$x = x_0 + \frac{n_{0x}}{n_{0z}} (z - z_0), \quad y = y_0 + \frac{n_{0y}}{n_{0z}} (z - z_0). \quad (6)$$

Принимая во внимание равенства (1) и (3), а также вводя обозначения

$$G_x \equiv \frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2}} + \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_0, \quad G_y \equiv \frac{y_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2}} + \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_0, \quad (7)$$

запишем равенства (6) следующим образом:

$$x = x_0 - G_x (z - z_0), \quad y = y_0 - G_y (z - z_0). \quad (8)$$

При заданной абберрационной функции в выходном зрачке соотношения (2), (7) и (8) позволяют проследить ход светового луча с произвольными исходными координатами  $(x_0, y_0)$  для всех значений  $z \geq z_0$ .

Полагая в (8)  $z = z_1$ , мы получаем соотношения

$$x_1 = x_0 - G_x (z_1 - z_0), \quad y_1 = y_0 - G_y (z_1 - z_0), \quad (9)$$

которые позволяют найти на диафрагме положение луча, исходящего из точки  $(x_0, y_0)$  выходного зрачка. По смыслу задачи заданными следует считать координаты  $(x_1, y_1)$  в плоскости диафрагмы, а потому следует обратить уравнения (9) и найти  $(x_0, y_0)$  как функции  $(x_1, y_1)$  и характеристик абберрационной функции. Способ численного решения уравнений (9) описан ниже в Разделе 4.

Запишем также уравнения (8) для плоскости  $z = z_2$ , где расположен детектор:

$$x_2 = x_0 - G_x (z_2 - z_0), \quad y_2 = y_0 - G_y (z_2 - z_0). \quad (10)$$

С помощью (9) это решение можно представить в форме, содержащей абберрационную функцию лишь неявным образом:

$$x_2 = x_1 - \frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} (x_0 - x_1), \quad y_2 = y_1 - \frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} (y_0 - y_1). \quad (11)$$

Само по себе содержание последних уравнений тривиально: они отражают лишь тот факт, что световые лучи распространяются прямолинейно. Основную роль в рассматриваемой задаче играют

соотношения (9), связывающие aberrации оптической системы с распределением световых лучей на диафрагме.

Как явствует из (7) и (10), смещения лучей на детекторе, обусловленные aberrациями оптической системы, равны

$$\begin{cases} \delta x_2 = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_0 (z_2 - z_0), \\ \delta y_2 = - \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_0 (z_2 - z_0). \end{cases} \quad (12)$$

Здесь вновь стоит подчеркнуть то обстоятельство, что производные от aberrационной функции задаются в выходном зрачке, и лишь косвенно – с помощью уравнений (9) – они связаны со структурой диафрагмы. Что касается величины смещений, описываемых формулами (12), то при оценке их порядка следует учитывать локальность градиента aberrационной функции, зачастую существенно превосходящего по абсолютной величине средний градиент  $W$  в выходном зрачке.

В дальнейшем удобно параметризовать aberrационную функцию  $W(x, y)$  с тем, чтобы обратная задача свелась к оцениванию конечной совокупности параметров. В качестве таковых выберем коэффициенты  $\{a_j\}$  разложения  $W$  по ортогональным полиномам Цернике  $\{Z_j\}$  на круговом зрачке диаметром  $D_p$ :

$$W(x_0, y_0) = \lambda \sum_{j=1}^J a_j Z_j(\bar{x}, \bar{y}), \quad (13)$$

где  $\lambda$  – длина волны света, а безразмерные координаты

$$\bar{x} = 2x_0/D_p, \quad \bar{y} = 2y_0/D_p, \quad -1 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1, \quad (14)$$

нормированы радиусом выходного зрачка. Как видно из (13), коэффициенты Цернике измеряются в единицах длины волны.

Свойства полиномов Цернике (1934) и причины, по которым они столь важны в оптике, обсуждаются в книге Борна и Вольфа (1999) и обзоре Бездидько (1974). В номенклатуре Нолла (1976)  $Z_1$  представляет постоянный сдвиг фазы, не влияющий на вид изображения,  $Z_2$  и  $Z_3$  описывают наклоны волнового фронта в направлениях координатных осей,  $Z_4$  задает кривизну поля вблизи парааксиального фокуса,  $Z_5$  и  $Z_6$  соответствуют астигматизму третьего порядка,  $Z_7$  и  $Z_8$  – комы третьего порядка,  $Z_9$  и  $Z_{10}$  – треугольной комы пятого порядка,  $Z_{11}$  – сферической aberrации третьего порядка. Таким образом, для получения основной информации о виде волнового фронта следует брать, по крайней мере, 11 слагаемых в разложении (13).

Обозначим через  $\mathcal{F} \equiv R/D_p$  относительное фокусное расстояние оптической системы (f-number). С учетом (13) и (14) данное в (7) определение коэффициентов  $G_x$  и  $G_y$  записывается следующим образом:

$$\begin{cases} G_x = \frac{\bar{x}}{\sqrt{4\mathcal{F}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}} + \frac{2\lambda}{D_p} \sum_{j=1}^J a_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}} Z_j(\bar{x}, \bar{y}), \\ G_y = \frac{\bar{y}}{\sqrt{4\mathcal{F}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}} + \frac{2\lambda}{D_p} \sum_{j=1}^J a_j \frac{\partial}{\partial \bar{y}} Z_j(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (15)$$

Входящие сюда частные производные легко представляются в аналитической форме при помощи известных выражений для полиномов Цернике.

Приведенные в этом разделе формулы составляют основу для решения как прямой, так и обратной задач. Важно отметить, что эти формулы никак не связаны с последующим выбором структуры диафрагмы. В самом деле, они дают локальное описание траектории произвольного светового луча, а диафрагма (маска) выделяет ту совокупность из множества этих лучей, которая интересует нас в конкретной задаче. Таким образом, в приближении геометрической оптики приведенные соотношения следует использовать при рассмотрении масок произвольного вида, и в частности, решетки

Ронки или диафрагмы Гартмана. Маска может располагаться на произвольном удалении от выходного зрачка или совпадать с ним; положение маски близ фокуса выгодно только для уменьшения габаритов схемы.

## 4 Прямая задача

Очевидно, прежде чем решать обратную задачу, следует проанализировать ее прямую версию. В данном случае последняя подразумевает нахождение координат  $\{x_2, y_2\}$  изображений совокупности отверстий диафрагмы Гартмана на детекторе при известной аберрационной функции  $W(x, y)$  и заданных координатах самих отверстий  $\{x_1, y_1\}$ .

Искомые величины  $\{x_2, y_2\}$  определяются формулами (10). Поскольку в эти формулы входят координаты луча  $(x_0, y_0, z_0)$  на зрачке, следует предварительно найти их в зависимости от координат отверстий диафрагмы  $(x_1, y_1, z_1)$ . Это выполняется при помощи уравнений (9). Имея в виду итерационную процедуру, перепишем их следующим образом:

$$\begin{cases} x_0^{(k+1)} = x_1 + G_x^{(k)} [z_1 - z_0^{(k)}], \\ y_0^{(k+1)} = y_1 + G_y^{(k)} [z_1 - z_0^{(k)}], \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

В качестве начального приближения  $[x_0^{(0)}, y_0^{(0)}]$  удобно принять координаты точки пересечения сферы сравнения и прямой, проходящей через точку  $M$  и параксиальный фокус  $F$  (см. Рис. 1). Для достижения относительной точности оценки координат  $10^{-7}$  требуется порядка  $10^3$  итераций.

Описанный итерационный процесс легко обобщается на случай одновременного решения прямой задачи для множества отверстий в диафрагме. Это позволяет эффективно реализовать алгоритм в матричных языках программирования типа Matlab.

## 5 Обратная задача

Решение обратной задачи имеет целью дать оценку  $\hat{a}$  вектора коэффициентов Цернике  $a = [a_1, a_2, \dots, a_J]^T$  в разложении (13) аберрационной функции на основании заданных наборов координат отверстий  $\{x_1, y_1\}$  и их проекций на детекторе  $\{x_2, y_2\}$ . Для упрощения записи будем по-прежнему вести изложение так, как если бы диафрагма имела только одно отверстие.

Знание координат отверстий и их проекций позволяет найти из (9) и (10) величины

$$G_x = \frac{x_1 - x_2}{z_2 - z_1}, \quad G_y = \frac{y_1 - y_2}{z_2 - z_1}. \quad (17)$$

Искомая оценка  $\hat{a}$  разыскивается методом максимального правдоподобия. Как известно, при гауссовом распределении шума оценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой наименьших квадратов (см., например, Боровков, 1997). Используемая нами итерационная процедура получения оценки была организована следующим образом.

Для начального приближения  $[x_0^{(0)}, y_0^{(0)}]$  типа того, которое было указано в предыдущем разделе, методом наименьших квадратов решается система уравнений (15) относительно коэффициентов Цернике. Полученные значения коэффициентов Цернике используются затем во внутренней итерационной процедуре (16) для вычисления новой оценки  $[x_0^{(1)}, y_0^{(1)}]$ . Далее цикл повторяется. Для достижения разумной точности решения обычно требуется лишь несколько итераций.

## 6 Ограничения, накладываемые дифракцией света на отверстиях

Рассмотрим сначала ограничения, следующие из анализа дифракционной картины для отдельных отверстий диафрагмы Гартмана.

Обозначим через  $a \equiv R - z_1$  и  $b \equiv z_2 - R$  расстояния от диафрагмы до парааксиального фокуса системы и от фокуса до приемника света, соответственно (Рис. 1). Пусть, далее,  $\delta$  – диаметр отверстий и  $\mathcal{F}_h \equiv a/\delta$  – относительное фокусное расстояние, отвечающее отверстиям. Предполагается, что  $\delta \gg \lambda$  и  $\mathcal{F}_h \gg 1$ . При умеренных абберациях оптики свет, прошедший через отверстие, формирует дифракционную картину, близкую к трехмерной картине Эйри (см. Борн и Вольф, 1999). Поперечная протяженность последней вблизи фокуса составляет величину порядка  $2.4\lambda\mathcal{F}_h$ , а продольная – порядка  $16\lambda\mathcal{F}_h^2$ . При недостаточном удалении детектора от фокуса дифракционные изображения различных отверстий будут перекрываться, при слишком большом удалении детектора дифракционные изображения каждого из отверстий будут сильно размыты. Таким образом, расстояние  $b$  целесообразно ограничить условиями

$$q_1\lambda\mathcal{F}_h < b < q_2\lambda\mathcal{F}_h^2, \quad (18)$$

где можно принять, скажем,  $q_1 \simeq 5$ ,  $q_2 \simeq 4$ .

Дифракция на системе отверстий в основных чертах имеет тот же характер, что и хорошо изученная в связи с теорией решетки Ронки дифракция на системе полос (см. обзор Ронки, 1964, и цитированную в нем литературу).

Пусть  $p$  – характерное расстояние между отверстиями ( $\lambda \ll p \ll a, b$ ;  $p > \delta$ ). Угол дифракции примерно равен  $\lambda/p$ , так что в фокальной плоскости оптической системы образуются дифракционные максимумы разных порядков, разделенные промежутком  $\sim a \cdot \lambda/p$ . Эти максимумы представляют собой совокупность *когерентных* источников света, формирующих на детекторе дифракционную картину. При выполнении указанных выше неравенств распределение интенсивности света в плоскости наблюдения близко к тому, которое следует из простого геометрического рассмотрения. Именно, диаметр изображения каждого отверстия  $\Delta \simeq \delta \cdot b/a$ , а расстояние между изображениями  $P \simeq p \cdot b/a$ . Другими словами, в первом приближении исходная система отверстий проецируется на детектор с масштабным фактором  $b/a$ , не зависящим от длины волны. Это, однако, не означает, что изображения отверстий будут резкими.

Дело в том, что изображения отверстий, соответствующие разным дифракционным порядкам  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , будут сдвинуты на величину

$$s_m(\lambda) = m(a+b)\frac{\lambda}{p}. \quad (19)$$

Даже при малой некогерентности освещения зависимость сдвига от длины волны приведет к тому, что края изображений размоются и станут окрашенными. Но и в случае строго монохроматического источника света изображения разных порядков перекроются со сдвигом. Поскольку относительная яркость изображений быстро падает по мере увеличения порядка, достаточно потребовать, чтобы величина сдвига (19) не превосходила диаметра изображения отверстия  $\Delta$  для порядков  $m \leq m_*$ , где  $m_* \sim 2 - 3$ . Это приводит к условию

$$m_*(a+b)\frac{\lambda}{p} < \frac{b}{a}\delta. \quad (20)$$

Вводя обозначение  $c \equiv p\delta/(\lambda m_*)$ , получаем отсюда:

$$a < c, \quad b > \frac{a^2}{c-a}. \quad (21)$$

Еще одно условие следует из необходимости достаточно плотно заполнить волновой фронт сеткой измерений (sampling). Для этого нужно, чтобы рабочая область диафрагмы Гартмана содержала как можно больше отверстий. Количество отверстий на диаметре примерно равно

$$K = \frac{a}{\mathcal{F}p}, \quad (22)$$

так что упомянутое выше условие задается фиксацией  $K$  или минимального количества отверстий на поперечнике диафрагмы.

В совокупности условия (18), (21) и (22) составляют систему взаимозависимых ограничений на характеристики схемы. Полагая заданными параметры  $\mathcal{F}$ ,  $K$ ,  $\lambda$ ,  $m_*$ ,  $q_1$  и  $q_2$ , а также считая  $p > \delta$ , этим ограничениям можно придать удобную форму. Во-первых, диаметр отверстий должен быть достаточно большим:

$$\delta > \delta_{\min}, \quad \delta_{\min} = \lambda \mathcal{F} K m_*. \quad (23)$$

Во-вторых, при выбранном значении  $\delta$  удаление диафрагмы от фокуса ограничено снизу:

$$a > a_{\min}, \quad a_{\min} = \delta \mathcal{F} K. \quad (24)$$

Считая фиксированным значение  $\delta$ , мы должны учитывать следующее неравенство для параметров расположения  $a$  и  $b$ :

$$b > \frac{a}{\delta/\delta_{\min} - 1}. \quad (25)$$

Второе такое неравенство носит двусторонний характер:

$$\frac{q_1 \lambda}{\delta} a < b < \frac{q_2 \lambda}{\delta^2} a^2. \quad (26)$$

Условия (24) – (26) ограничивают на плоскости  $(a, b)$  область, в которой можно выбрать подходящие в данных условиях значения этих параметров. Наконец, после выбора  $a$  определяется и расстояние между отверстиями:

$$p = \frac{a}{\mathcal{F} K}. \quad (27)$$

Пример использования этой процедуры приводится в Разделе 8 (см. Рис. 2).

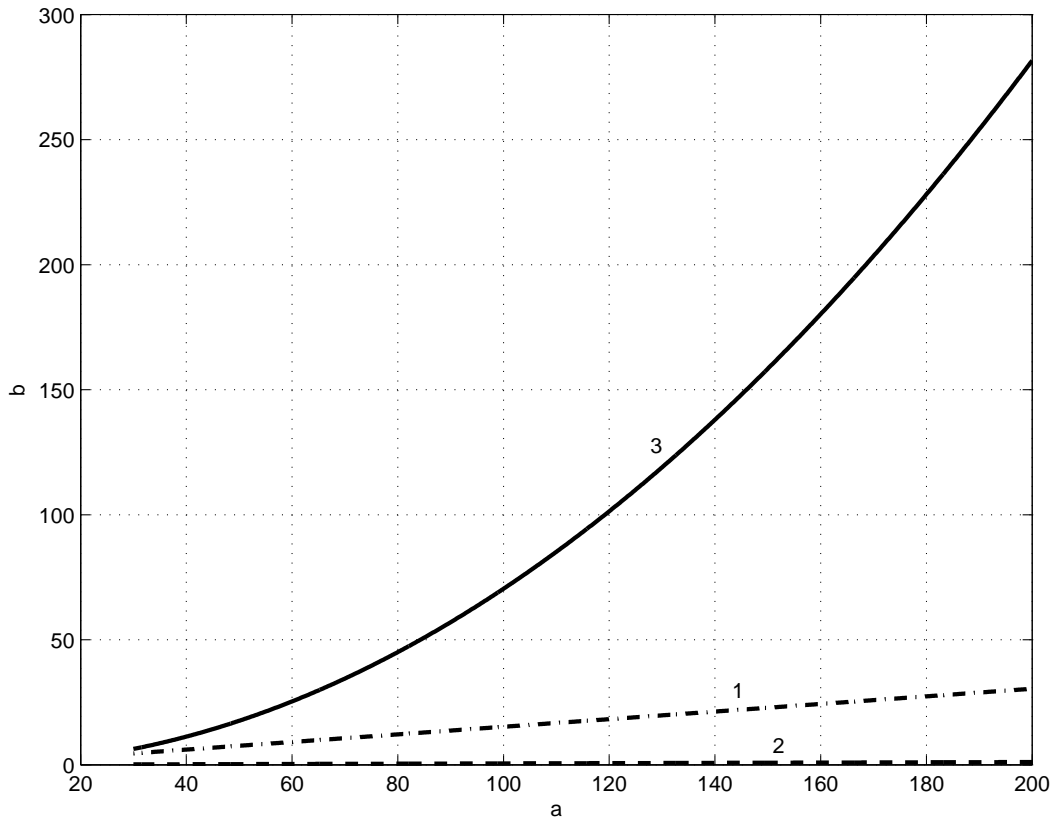
## 7 Точность оценок абберационных коэффициентов

Очевидно, практическая ценность обсуждаемого метода в значительной мере зависит от устойчивости результатов по отношению к неизбежным ошибкам при измерении положения диафрагмы Гартмана как целого и координат изображений отверстий маски на детекторе (для краткости – *платен*). Полное изложение результатов соответствующего аналитического исследования и численного моделирования выходит за рамки данной публикации; здесь мы только наметим ход рассуждений, приведем общие выводы и численные примеры.

При перечислении возможных неточностей мы намеренно не упомянули случайные ошибки измерения координат самих отверстий диафрагмы. Нужно полагать, что для диафрагмы малых размеров аттестационная процедура будет выполнена с точностью, превосходящей нужды описываемого эксперимента.

В связи с последующим описанием результатов расчетов напомним, что абсолютные величины коэффициентов Цернике  $\{a_j\}$  характеризуют *среднеквадратические* отклонения волнового фронта (*RMS*), которые в несколько раз меньше полного размаха отклонения волнового фронта от сферы (*Peak-to-Valley, PTV*). Отношение  $PTV/RMS$  зависит от коэффициента центрального экранирования системы  $\eta$  и вида абберации (Шредер, 2000, §10.3); при типичных для астрономической оптики значениях  $\eta \simeq 0.30$  отношение  $PTV/RMS$  находится в диапазоне от  $\sim 3.4$  для сферической абберации до  $\sim 5.5$  для комы. Таким образом, значениям  $PTV \simeq \lambda/5$ , вполне обнаружимым при анализе интерферограмм в автоколлимационной схеме, отвечают значения  $RMS \simeq \lambda/20$ .





**Рис. 2.** Дифракционные ограничения в плоскости  $(a, b)$  при значениях исходных параметров согласно (32). Кривая 1 отвечает неравенству (25), кривые 2 и 3 – неравенству (26). Разрешенная область находится между кривыми 1 и 3, слева она ограничена значением  $a_{\min} = 30$  мм

### 7.1 Смещение диафрагмы как целого

Роль поперечного смещения диафрагмы Гартмана можно выяснить следующим образом. Предположим, что неконтролируемые сдвиги вдоль осей координат составляют  $\delta_x$  и  $\delta_y$ , тогда как исследователь полагает диафрагму выставленной точно. Тогда истинные координаты отверстий диафрагмы будут равны  $\{x_1 + \delta_x, y_1 + \delta_y\}$ , а обратная задача решается при номинальных значениях  $\{x_1, y_1\}$ . Это приведет к неточностям градиентов  $G_x$  и  $G_y$ , задаваемых формулами (15) и (17), равным  $\delta_x/(z_2 - z_1)$  и  $\delta_y/(z_2 - z_1)$ . Наконец, решение обратной задачи при помощи описанной в Разделе 5 процедуры дает нам оценки коэффициентов Цернике, отягощенные ошибками. Величина последних зависит как от смещений  $(\delta_x, \delta_y)$ , так и от величины самих aberrаций. Искомые зависимости выясняются путем многократного численного моделирования.

В наших расчетах сдвиги диафрагмы  $\delta_x$  и  $\delta_y$  варьировались в пределах 0.1 – 2.0 мм, а модули коэффициентов Цернике – в пределах 0.05 – 0.20 длины волны. Основные результаты сводятся к следующему.

Если тестируется безабберационная система, то поперечный сдвиг диафрагмы порождает заметные ошибки лишь коэффициентов  $a_7$  и  $a_8$  комы третьего порядка. Эти ошибки линейно зависят от величины смещения диафрагмы с коэффициентом пропорциональности  $\sim 0.013 \lambda/\text{мм}$ . Если же тестируемая система обладает собственными комой и (или) сферической aberrацией, то неточности установки диафрагмы, не превосходящие  $\sim 1$  мм, порождают дополнительную ошибку в оценке комы, примерно на порядок величины меньшую истинных aberrационных коэффициентов. Собственный астигматизм системы слабо влияет на оценивание aberrаций при смещении диафрагмы.

Таким образом, неконтролируемый поперечный сдвиг диафрагмы Гартмана порядка нескольких десятых долей миллиметра искажает оценки коэффициентов Цернике не более, чем на 20%.

## 7.2 Случайные ошибки координат пятен

Обратимся теперь ко второму из упомянутых выше факторов – влиянию неточностей координат отдельных пятен. Мы предполагаем, что возможные систематические ошибки измерительной процедуры уже учтены, так что речь идет о случайных ошибках, обусловленных, прежде всего, фотонным шумом. Для простоты будем считать, что ошибки измерения координат произвольного пятна в направлениях координатных осей представляют собой независимые случайные величины, распределенные согласно закону Гаусса с нулевым средним значением и среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ , не зависящим от положения пятна. Величина  $\sigma$  определяется средним количеством зарегистрированных фотособытий в пределах отдельного пятна; соответствующее отношение сигнала к шуму нетрудно вычислить для условий как лабораторного эксперимента, так и наблюдений звезды с телескопом.

Обозначим через  $N$  полное количество пятен на детекторе и через  $\xi, \eta$  – совокупности измеренных координат пятен в направлениях осей  $x$  и  $y$ , соответственно. Тогда условную плотность распределения двумерной случайной величины  $(\xi, \eta)$  при фиксированных абберациях системы можно записать в виде

$$f(x, y|a) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \left( x^{(k)} - x_2^{(k)} \right)^2 + \left( y^{(k)} - y_2^{(k)} \right)^2 \right] \right\}, \quad (28)$$

где  $x = [x^{(1)}, \dots, x^{(N)}]^T$  и  $y = [y^{(1)}, \dots, y^{(N)}]^T$  суть векторы длины  $N$ , а  $x_2^{(k)}$  и  $y_2^{(k)}$  – истинные координаты  $k$ -го пятна на детекторе, определяемые формулами (10). Эти координаты зависят от аббераций оптической системы, описываемых вектором коэффициентов Цернике  $a = [a_1, \dots, a_J]^T$ . Напомним, что *правдоподобием* принято называть, следуя Фишеру, плотность  $f(x, y|a)$ , рассматриваемую как функцию совокупности параметров  $\{a_j\}$ .

Согласно теореме Рао-Крамера, нижняя граница дисперсии произвольной несмещенной оценки неизвестных параметров (в данном случае – коэффициентов Цернике) задается вектором

$$\sigma_{\min}^2(a) = \text{diag} [I(a)^{-1}], \quad (29)$$

где  $I(a)^{-1}$  – матрица, обратная матрице Фишера  $I(a)$ , а знак "diag" указывает на выделение диагонали матрицы (см. Кендалл и Стюарт, 1969; Боровков, 1997). Элементы матрицы Фишера определяются следующим образом:

$$I_{ij}(a) = \left\langle -\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \ln f(\xi, \eta|a) \right\rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, J, \quad (30)$$

где угловые скобки означают операцию усреднения. Подставив выражения (28) и (10) в (30), получаем:

$$I_{ij}(a) = \frac{(z_2 - z_1)^2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\partial G_x^{(k)}}{\partial a_i} \frac{\partial G_x^{(k)}}{\partial a_j} + \frac{\partial G_y^{(k)}}{\partial a_i} \frac{\partial G_y^{(k)}}{\partial a_j} \right]. \quad (31)$$

Формулы (31) и (7) позволяют найти матрицу Фишера в явном виде. Мы не будем приводить здесь соответствующие выражения ввиду их громоздкого вида; заметим только, что при дифференцировании по компонентам вектора Цернике необходимо воспользоваться уравнениями луча (9) и правилом дифференцирования неявных функций. Это обусловлено тем обстоятельством, что для фиксированных координат отверстий на диафрагме  $\{x_1^{(k)}, y_1^{(k)}\}$  исходные координаты лучей на зрачке  $\{x_0^{(k)}, y_0^{(k)}\}$  зависят от аббераций системы.

Численное обращение матриц входит в стандартный набор операций, осуществляемых большинством современных математических систем. Выполнив его в отношении матрицы Фишера, мы выясняем, согласно (29), наивысшую теоретически достижимую точность несмещенных оценок коэффициентов аберраций. При этом остается открытым важный вопрос, достигает ли *конкретная* применяемая процедура оценивания теоретической границы. Как обычно, в этом отношении ответ позволяет дать численное моделирование для условий, имитирующих реальные условия эксперимента.

В данном случае для получения оценок использовался метод максимального правдоподобия. Этот метод позволяет получить асимптотически несмещенные оценки; зачастую их точность близка к теоретически достижимой точности, определяемой границей Рао – Крамера (29). Мы провели обширное компьютерное моделирование, в рамках которого при заданных аберрациях системы сначала формировалась гартманограмма (т.е. решалась прямая задача, см. Раздел 4), затем к ее изображению добавлялся случайный шум, и наконец, вычислялись оценки коэффициентов Цернике (обратная задача, Раздел 5). Результаты моделирования показали, что используемая методика обеспечивает точность, несущественно отличающуюся от теоретически достижимой точности решения обратной задачи. Один из типичных примеров обсуждается в следующем разделе.

Следует заметить, что выражением (29) не исчерпывается информация, доступная относительно обратного решения, т.е. оценок коэффициентов Цернике. В частности, внедиагональные элементы матрицы  $I^{-1}$  характеризуют предельный характер корреляций между оценками различных аберрационных коэффициентов. Кроме того, собственные векторы и собственные значения матрицы Фишера характеризуют линейные комбинации оценок коэффициентов Цернике, которые при данной постановке эксперимента являются некоррелированными. Эти вопросы требуют специального обсуждения.

## 8 Модельный пример

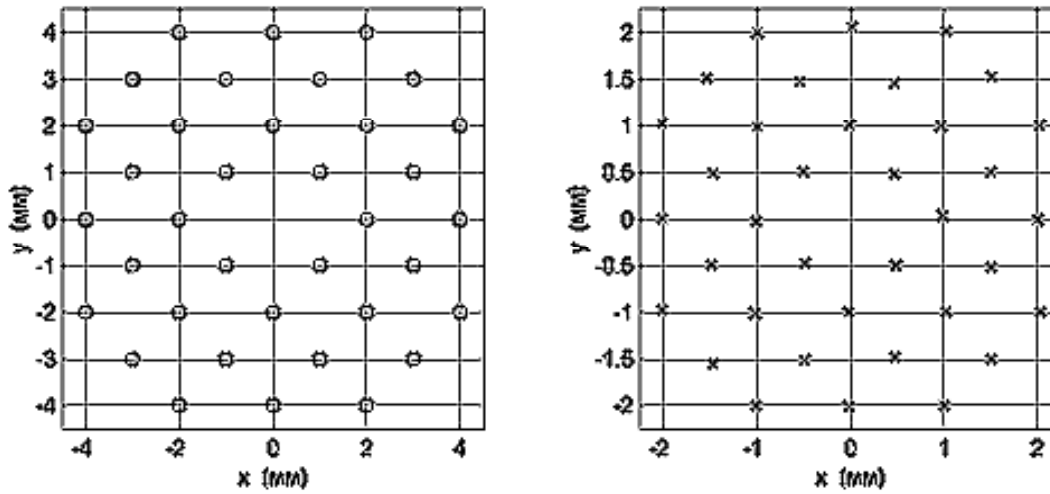
В качестве примера рассмотрим схему испытаний при следующих значениях параметров, введенных в Разделе 6:

$$\mathcal{F} = 10.0; \quad K = 7; \quad \lambda = 0.55 \text{ мкм}; \quad m_* = 2; \quad q_1 = 5; \quad q_2 = 3.2. \quad (32)$$

Вычисленное по формуле (23) минимальное значение диаметра отверстий  $\delta_{\min} = 0.066$  мм. Полагая  $\delta = 0.5$  мм, находим из (24) минимальное удаление диафрагмы от фокуса:  $a_{\min} = 30$  мм. Рис. 2 показывает ограничения на плоскости  $(a, b)$  согласно неравенствам (24) – (26). Чтобы не увеличивать без надобности размеры установки, выберем значения  $a = 100$  мм,  $b = 50$  мм, отвечающие разрешенной области. Тогда (27) дает расстояние между отверстиями  $p = 1.43$  мм, при котором реализуется нужное их количество на диаметре диафрагмы. При заданных  $\mathcal{F}$  и  $a$  общий размер диафрагмы составляет  $\sim 10$  мм.

На Рис. 3а показана диафрагма с отверстиями в узлах квадратной сетки, отвечающая указанным выше требованиям. В отсутствие аберраций картина пятен на детекторе масштабируется с коэффициентом  $b/a = 0.50$ . Внесем теперь аберрации, скажем, астигматизм  $a_6 = 0.08$ , кому  $a_7 = -0.07$  и сферическую аберрацию  $a_{11} = 0.10$ . Рис. 3б иллюстрирует вид соответствующей системы пятен на детекторе. В данном примере смещения составляют десятки микрон, так что их измерение можно выполнить с нужной точностью.

Если координаты пятен измеряются совершенно точно, то описанная в Разделе 5 процедура решения обратной задачи приводит к оценкам коэффициентов Цернике, совпадающим с исходными.



**Рис. 3.** Расположение центров отверстий в диафрагме Гартмана (а) и соответствующих им пятен на детекторе (б) при отличных от нуля коэффициентах Цернике  $a_7 = a_{11} = 0.20$

*Таблица 1*

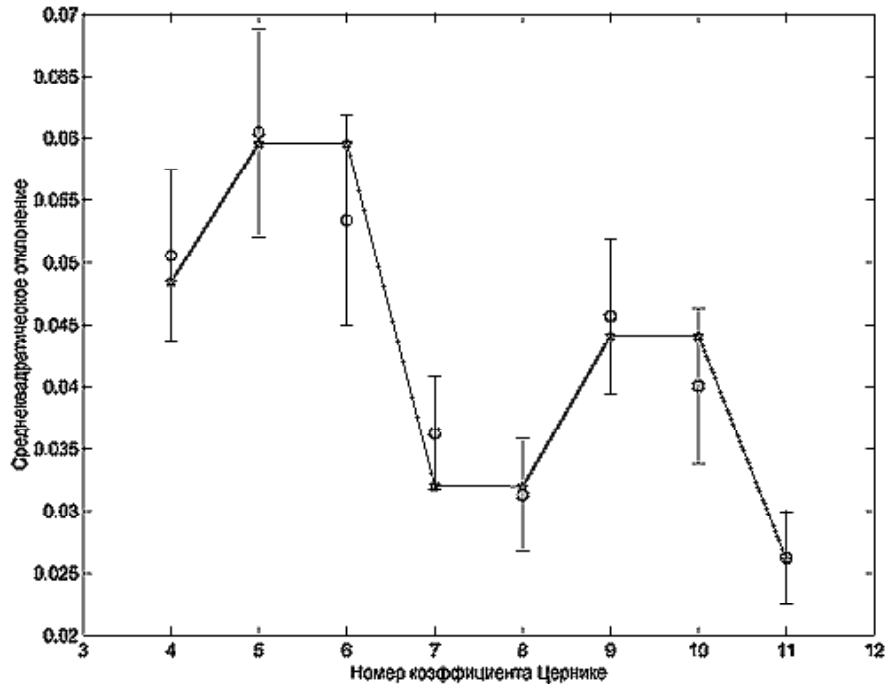
$j$	$a_j$	$\hat{a}_j$
4	0	-0.0041
5	0	-0.0026
6	0.0800	0.0837
7	-0.0700	-0.0505
8	0	0.0196
9	0	0.0000
10	0	0.0000
11	0.1000	0.1000

Рассмотрим влияние неконтролируемых сдвигов диафрагмы Гартмана вдоль осей координат. Результаты решения обратной задачи при  $\delta_x = \delta_y = 0.75$  мм представлены в Табл. 1. Первые три коэффициента Цернике  $a_1 - a_3$  характеризуют юстировку системы и не представляют физического интереса, поэтому в таблице указаны коэффициенты, начиная с четвертого. Хотя коэффициент  $a_4$  характеризует присущую системе кривизну поля в фокальной плоскости, его также часто исключают из рассмотрения, поскольку эта aberrация легко компенсируется подвижкой фокуса. Приведенный пример свидетельствует, что разумную оценку коэффициентов Цернике можно получить даже при сравнительно грубой установке диафрагмы.

Для оценки роли случайных ошибок измерения координат пятен (см. Раздел 7.2) положим среднеквадратическое отклонение  $\sigma = 20$  мкм. Результаты численного моделирования, а также соответствующая граница Рао – Крамера, представлены на Рис. 4. Как видно из рисунка, оценки максимального правдоподобия коэффициентов Цернике весьма близки к граничным. Для принятых нами aberrаций системы точность оценивания координат пятен  $\sim 20$  мкм достаточна, чтобы оценить коэффициенты Цернике с ошибкой менее  $\lambda/16$ . Поскольку ошибки оценивания коэффициентов Цернике здесь прямо пропорциональны ошибкам измерения координат пятен, при необходимости можно достичь и более высокой точности восстановления aberrаций. Заметим в этой связи, что, согласно известному критерию Маршала (1947), оптическую систему можно считать дифракционно-ограниченной, если среднеквадратическая ошибка волнового фронта не превосходит  $\lambda/14$  (см. также Борн, Вольф, 1999, §9.3).

## 9 Заключение

Численное моделирование, аналогичное описанному в предыдущем разделе, было выполнено для широкого набора возможных aberrаций оптической системы, ошибок при установке диафрагмы Гартмана и ошибок измерения координат пятен на детекторе. Анализ результатов показывает, что тест Гартмана в сходящемся пучке представляет несомненный практический интерес: он обеспечивает приемлемую точность оценивания aberrаций третьего порядка при умеренной чувствительности



**Рис. 4.** Предельная точность оценивания коэффициентов Цернике согласно неравенству Рао – Крамера (\*) и реально достигнутая точность оценок (o) для примера, рассмотренного в Разделе 8. Вертикальные отрезки соответствуют  $\pm$  одному стандартному отклонению выборочных оценок в модельных расчетах

к ошибкам измерений. Отчасти это обусловлено тем обстоятельством, что используемая нами методика анализа данных обладает эффективностью, близкой к теоретически предельной. Численное моделирование позволяет выяснить и точность оценивания aberrаций высоких порядков. Соответствующие данные, а также результаты, полученные с пробной экспериментальной установкой, мы обсудим в последующей публикации.

Вообще говоря, количество восстанавливаемых aberrационных коэффициентов и точность их оценок можно существенно повысить путем небольших сдвигов диафрагмы и детектора вдоль оптической оси. Очевидно, при этом система отверстий проецируется на разные элементы волнового фронта в выходном зрачке, так что измерениям становится доступной более обширная его часть. Простейший вариант заключается в продольном сдвиге платформы с закрепленными на ней диафрагмой и детектором. Проведенные нами предварительные расчеты подтвердили ожидаемую перспективность этого направления. На практике такие сдвиги можно реализовать не только механически, но и оптическим способом.

Оригинальный тест Гартмана с применением большой диафрагмы во входном зрачке системы и версия этого теста, связанная с построением малого выходного зрачка и введением референтной оптической системы, предъявляют повышенные требования к экспериментальной стороне процедуры контроля, но сравнительно просты в отношении обработки результатов измерений. Напротив, тест Гартмана в сходящемся пучке реализуется на практике весьма просто, однако, как мы видели, требует серьезной работы при анализе данных. По-видимому, именно эта причина привела к столь сильной задержке в практическом использовании последнего метода, несмотря на очевидность его схемы. В наши дни сложность расчетной процедуры уже не может служить препятствием, тем более, что изображение маски на детекторе света считывается непосредственно в память компьютера.

Последнее замечание касается приложения метода к проблемам адаптивной оптики. В рассматриваемой здесь постановке задачи aberrации оптической системы — коэффициенты Цернике — трактуются как неизвестные *детерминированные* величины, подлежащие оцениванию по результа-

там измерений. Такой подход естествен при контроле оптических систем, однако адаптивная оптика имеет дело с системами, на вход которых поступает *случайный* волновой фронт; при этом абберационные коэффициенты образуют совокупность взаимосвязанных случайных величин. Если статистические характеристики атмосферы заданы, то мы приходим к т.н. *байесовой* постановке задачи. Соответствующая модификация процедуры получения оценок с учетом априорной информации относительно объекта хорошо известна (см, например, Боровков, 1997). Особого внимания требует то обстоятельство, что исходные корреляционные характеристики коэффициентов Цернике могут в значительной мере искажаться корреляцией оценок, привносимой всякой процедурой решения обратной задачи. В этом отношении существенную, если не решающую, роль играет подробный анализ картины, получающейся при численном моделировании.

## Литература

- Бездидько С.Н. // Оптико-механическая промышленность. 1974. N. 9. С. 58.  
Борн, Вольф (M. Born and E. Wolf) // "Principles of Optics" Cambridge Univ. Pr. 1999.  
Боровков А.А. // "Математическая статистика", Наука, Новосибирск. 1997.  
Вилсон (R.N.Wilson) // "Reflecting Telescope Optics". V. II. Springer. 1999.  
Витриченко Э.А. // "Методы исследования астрономической оптики" М.: Наука. 1980.  
Гартман (J. Hartmann) // Z. Instrumentenkde. 1904. V. 24(1). N. 33. P. 97.  
Голден (L.J. Golden) // Appl. Opt. 1975. V. 14. P. 2391.  
Кендалл, Стюарт (M.G. Kendall and A. Stuart), "The Advanced Theory of Statistics", Griffin, London. 1969.  
Корнехо-Родригес (A. Cornejo-Rodriges) // "Optical Shop Testing", Ed. D. Malacara, Wiley. Ch. 9. 1978.  
Лойбл (B. Loibl) // Astron. Astrophys. 1980. V. 91. P. 265.  
Марешаль (A. Marechal) // Rev. d'Optique. 1947. V. 26. P. 257.  
Нолл (R.J. Noll) // JOSA. 1976. V. 66. P. 207.  
Ронки (V. Ronchi) // Appl. Optics. 1964. V. 4. P. 437.  
Теребиж В.Ю. // Астрон. цирк. 1984. N. 1135. С. 1. V.Yu. Terebizh, Sky and Tel. Sep. 1990. 312.  
Теребиж В.Ю. // Усп. физич. наук. 1995а. Т. 165. С. 143.  
Теребиж (V.Yu. Terebizh) // Int. Journ. of Imaging Systems and Techn. 1995б. V. 6. P. 358.  
Цернике (F.Zernike) // Physica. 1934. V. 1. P. 689.  
Шредер (D.J.Schroeder) // "Astronomical Optics", San Diego. 2000.  
Шэк, Платт (R.V. Shack and B.C. Platt) // JOSA. 1971. V. 61. P. 656.