Изв. Крымской Астрофиз. Обс. 114, № 1, 58–63 (2018)

ИЗВЕСТИЯ КРЫМСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

УДК 521.172

Орбитальная эволюция системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени

А.С. Перминов, Э.Д. Кузнецов

Уральский федеральный университет, ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620000
perminov12@yandex.ru, Eduard.Kuznetsov@urfu.ru

Поступила в редакцию 15 ноября 2017 г.

Аннотация. В работе построена осредненная численно-аналитическая теория движения планет-гигантов Солнечной системы с точностью до второго порядка по массам планет. Гамильтониан четырехпланетной задачи записывается в системе координат Якоби в виде ряда по элементам второй системы Пуанкаре. Осреднение гамильтониана проводится с помощью метода Хори – Депри. Построенные уравнения движения интегрируются методом Эверхарта 15 порядка на интервале времени 10 млрд лет. Рассматривается характер орбитальной эволюции. Движение планет почти периодично. Эксцентриситеты и наклоны орбит планет, а также их короткопериодические возмущения остаются малыми на всем интервале интегрирования. Даются оценки точности численного интегрирования.

ORBITAL EVOLUTION OF THE SUN – JUPITER – SATURN – URANUS – NEPTUNE SYSTEM ON LONG TIME SCALES, *by A.S. Perminov, E.D. Kuznetsov*. The averaged semi-analytical motion theory for giant planets of the Solar system up to the second degree of planetary masses is constructed in this work. The Hamiltonian of four-planetary problem is written in the Jacobi coordinate system as a series in elements of the Poincare second system. The averaging of the Hamiltonian is performed by the Hori-Deprit method. The constructed motion equations are integrated by Everhart's method of the 15th order on a time interval of 10 billion years. The character of orbital evolution is considered. The motion of planets is almost periodic. Eccentricities and inclinations of planetary orbits, and their short-term perturbations remain small over the entire period of integration. The accuracy of numerical integration is given.

Ключевые слова: Солнечная система, планеты-гиганты, четырехпланетная задача, орбитальная эволюция, численно-аналитические методы, осредненная теория движения, метод Хори – Депри, координаты Якоби, вторая система элементов Пуанкаре

1 Разложение гамильтониана и построение уравнений движения

Работа посвящена исследованию орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы на интервале времени 10 млрд лет. Для этой цели построена осредненная численно-аналитическая теория движения второго порядка по массам планет. На первом этапе было получено разложение оскулирующего гамильтониана задачи в ряд Пуассона по элементам орбит, что подробно описано в работе (Перминов, Кузнецов, 2015). Гамильтониан четырехпланетной задачи записывается в координатах

Якоби, использование которых наиболее удобно при изучении орбитальной эволюции планетных систем, следующим образом:

$$h = -\sum_{i=1}^{4} \frac{M_i \kappa_i^2}{2a_i} + \mu \times G m_0 \left\{ \sum_{i=2}^{4} \frac{m_i (2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu R_i^2)}{r_i \tilde{R}_i (r_i + \tilde{R}_i)} - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|} \right\},$$

здесь

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad \tilde{R}_i = \sqrt{r_i^2 + 2\mu \mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu^2 R_i^2}, \quad |\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j| = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j + \mu \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k,$$

где $1 \le j < i \le 4$; $\boldsymbol{\rho}_k$ – барицентрический радиус-вектор планеты k, $\mathbf{r}_k$ – радиус-вектор Якоби, μm_k – масса планеты в массах звезды m_0, $\bar{m}_k = 1 + \mu m_1 + \ldots + \mu m_k$, $M_i = m_i \bar{m}_{i-1} / \bar{m}_i$ – приведенная масса, $\kappa_i^2 = G m_0 \bar{m}_i / \bar{m}_{i-1}$ – гравитационный параметр. Величина μ, равная отношению суммы масс планет к массе звезды, является малым параметром задачи ($\mu = 0.001$ для Солнечной системы).

Разложение гамильтониана в ряд Пуассона ведется по малому параметру и каноническим элементам второй системы Пуанкаре (Субботин, 1968), которые выражаются через кеплеровские как

$$L_i = M_i \sqrt{\kappa_i^2 a_i}, \quad \xi_{1i} = \sqrt{2L_i (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \cos(\Omega_i + \omega_i), \quad \xi_{2i} = \sqrt{2L_i \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos I_i)} \cos \Omega_i$$

$$\lambda_i = \Omega_i + \omega_i + l_i, \quad \eta_{1i} = -\sqrt{2L_i (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \sin(\Omega_i + \omega_i), \quad \eta_{2i} = -\sqrt{2L_i \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos I_i)} \sin \Omega_i,$$

где a_i – большая полуось орбиты, e_i – эксцентриситет, I_i – наклон, Ω_i – долгота восходящего узла, ω_i – аргумент перицентра, l_i – средняя аномалия планеты.

Наличие только одной угловой переменной (средней долготы λ) существенно упрощает угловую часть разложения (Субботин, 1968)

$$h = h_0 + \mu h_1 = h_0 + \sum_{k,n} A_{kn} x^k \cos(n\lambda),$$

где h_0 – кеплеровский гамильтониан, μh_1 – возмущающая функция, A_{kn} – числовые коэффициенты, x^k – элементы Пуанкаре в соответствующих степенях, $n\lambda$ – линейная комбинация средних долгот.

В разложении в символьном виде сохраняются элементы орбит и массовые параметры задачи. Числовые коэффициенты в слагаемых рядов сохранены в виде рациональных дробей.

Далее проводится осреднение гамильтониана, исключающее короткопериодические возмущения, что позволяет существенно увеличить шаг интегрирования уравнений движения. Осредняющие преобразования выполняются методом Хори – Депри (Холшевников, 1985). Применение данного метода для построения осредненных уравнений движения четырехпланетной задачи рассмотрено в работе (Перминов, Кузнецов, 2016). Осреднение гамильтониана проводится по быстрым переменным задачи – средним долготам, частоты которых пропорциональны средним движениям планет.

Осредненный гамильтониан задачи строится в виде ряда по степеням малого параметра

$$H(X) = H_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m H_m(X).$$

Переход от известных оскулирующих элементов x, λ к искомым средним X, Λ реализуется с помощью функций замены переменных u_m и v_m

$$X = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mu^m u_m(x, \lambda), \quad \Lambda = \lambda + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mu^m v_m(x, \lambda).$$

Алгоритм вычисления величин H_m, u_m и v_m дается методом Хори – Депри. Уравнения движения вычисляются через скобки Пуассона гамильтониана и элементов Пуанкаре. Осредненные гамильтонианы и уравнения движения построены до первого и до второго порядка по малому параметру.

Все аналитические преобразования проводятся с помощью системы компьютерной алгебры Piranha (Бискани, 2017), которая представляет собой эшелонированный пуассоновский процессор.

2 Начальные условия для интегрирования

Осредненные уравнения движения интегрируются методом Эверхарта 15 порядка (Эверхарт, 1974) с шагом 10^4 лет. В качестве начальных условий для численного интегрирования взяты кеплеровские элементы орбит планет-гигантов Солнечной системы относительно средней эклиптики и равноденствия J2000.0 на эпоху 01.01.2000 (Фолкнер и др., 2014). Далее эти элементы преобразуются в элементы Пуанкаре в координатах Якоби и осредняются с использованием функций замены переменных. В таблице 1 приведены соответствующие им средние кеплеровские элементы орбит.

Таблица 1. Средние кеплеровские элементы орбит планет-гигантов Солнечной системы в координатах Якоби, относительно средней эклиптики и равноденствия J2000.0 (на эпоху 01.01.2000)

Планета	a, а.е.	e	I, °	ω, °	Ω, °	l, °
Юпитер	5.203433	0.0487429	1.303256	273.9763	100.4572	19.8694
Сатурн	9.554264	0.0551739	2.488183	339.6182	113.7219	316.7210
Уран	19.216003	0.0465882	0.773159	97.9370	73.9733	142.0651
Нептун	30.105333	0.0086852	1.775393	273.6950	131.7606	258.9275

3 Орбитальная эволюция планет-гигантов Солнечной системы

На рис. 1–3 представлена соответственно эволюция эксцентриситетов, наклонов и восходящих узлов орбит планет-гигантов Солнечной системы на интервале времени 2 млн лет для теории движения первого порядка по массам планет. Эксцентриситеты орбит Юпитера, Сатурна и Урана отделены от

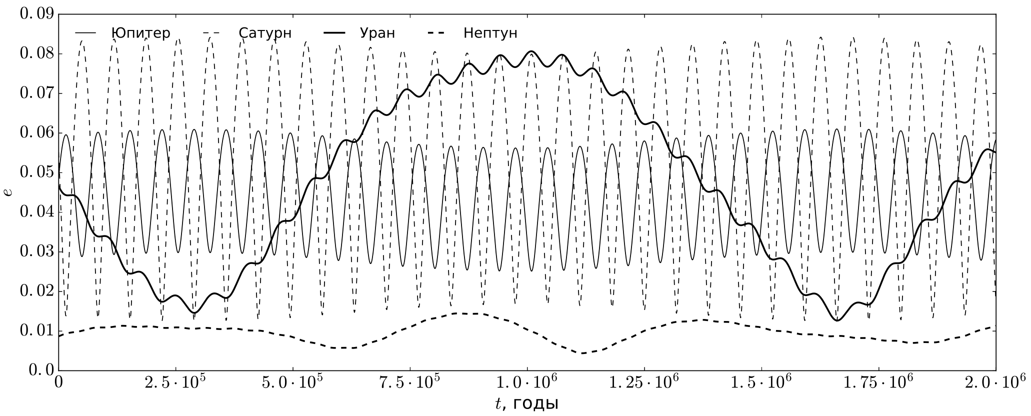

Рис. 1. Эволюция эксцентриситетов орбит планет-гигантов Солнечной системы в рамках теории движения первого порядка на интервале времени 2 млн лет

нуля, а эксцентриситет орбиты Нептуна может принимать близкие к нулю значения. Наклоны орбит всех планет отличны от нуля. При этом для орбит Юпитера и Сатурна эксцентриситеты, наклоны и восходящие узлы орбит изменяются в противофазе. Аргумент перицентра для всех орбит изменяется циклически. Качественный характер орбитальной эволюции сохраняется на всем интервале интегрирования 10 млрд лет.

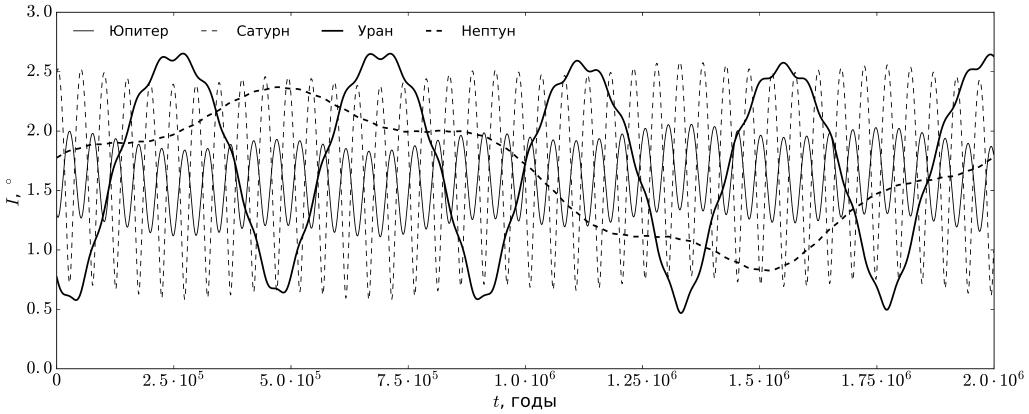

Рис. 2. Эволюция наклонов орбит планет-гигантов Солнечной системы в рамках теории движения первого порядка на интервале времени 2 млн лет

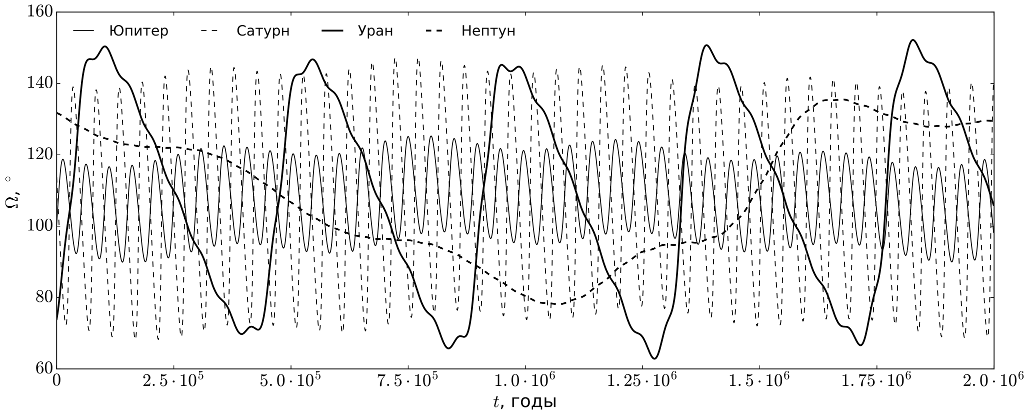

Рис. 3. Эволюция восходящих узлов орбит планет-гигантов Солнечной системы в рамках теории движения первого порядка на интервале времени 2 млн лет

При интегрировании уравнений движения второго порядка по массам планет не выявлено качественных различий в эволюции эксцентриситетов орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна по сравнению с теорией движения первого порядка. Характер эволюции эксцентриситетов орбит планет во втором приближении представлен на рис. 4. Можно видеть, что во втором приближении уменьшаются амплитуды и сокращаются периоды колебаний эксцентриситетов орбит планет. Наклоны и восходящие узлы орбит испытывают лишь незначительные изменения амплитуд и периодов колебаний, и их поведение аналогично приведенному на рис. 2 и 3. Показанный характер эволюции элементов сохраняется на всем интервале интегрирования в 10 млрд лет.

Максимальные и минимальные значения эксцентриситетов (e_{max}, e_{min}) и наклонов орбит (I_{max}, I_{min}) всех планет, их амплитуды (e_a, I_a) и периоды колебаний (T_e, T_I) приведены в таблице 2 для обоих приближений теории движения. Для восходящих узлов орбит приведены амплитуды (Ω_a) и периоды колебаний (T_Ω). Для аргументов перицентра орбит приведено время их циклического изменения (T_ω). В таблице 2 также проводится сравнение построенной численно-аналитической теории с результатами, полученными интегратором Коуэлла – Штермера 15 порядка, входящего в состав программы NBI (Варади, 1999). Все значения в таблице 2 даны для оскулирующих элементов и показывают хорошее согласие между собой.

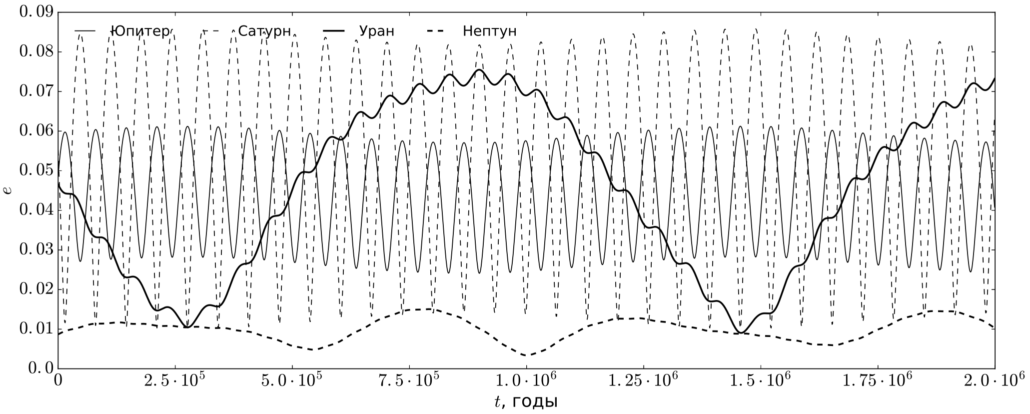

Рис. 4. Эволюция эксцентриситетов орбит планет-гигантов Солнечной системы в рамках теории движения второго порядка на интервале времени 2 млн лет

Таблица 2. Пределы и периоды изменения оскулирующих кеплеровских элементов по данным численно-аналитической теории и по результатам численного интегрирования с использованием интегратора Коуэлла-Штермера

	Юпитер			Сатурн			Уран			Нептун		
	К.-Ш.	первый порядок	второй порядок	К.-Ш.	первый порядок	второй порядок	К.-Ш.	первый порядок	второй порядок	К.-Ш.	первый порядок	второй порядок
e_{min}	0.0221	0.0193	0.0177	0.0088	0.0068	0.0049	0.0025	0.0082	0.0040	0.0016	0.0019	0.0008
e_{max}	0.0652	0.0659	0.0651	0.0871	0.0910	0.0930	0.0741	0.0855	0.0798	0.0170	0.0169	0.0176
e_a	0.0215	0.0233	0.0242	0.0392	0.0421	0.0440	0.0358	0.0386	0.0379	0.0077	0.0075	0.0084
T_e, лет	54 825	68 540	65 574	54 825	68 540	65 574	$1.1 \cdot 10^6$	$1.4 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^6$	537 640	606 000	543 000
I_{min}, °	1.0935	1.0936	1.0930	0.5545	0.5626	0.5634	0.4597	0.4395	0.3975	0.7740	0.7824	0.7899
I_{max}, °	2.0661	2.0577	2.0224	2.5998	2.5982	2.5949	2.7852	2.6980	2.7364	2.3848	2.3798	2.3734
I_a, °	0.4863	0.4859	0.4850	1.0227	1.0178	1.0158	1.2042	1.1191	1.1484	0.8054	0.7987	0.7917
T_I, лет	49 189	49 164	49 285	49 189	49 164	49 285	432 905	432 900	432 900	$1.9 \cdot 10^6$	$1.9 \cdot 10^6$	$1.9 \cdot 10^6$
Ω_a, °	17.829	17.950	17.931	40.359	40.228	40.155	49.875	45.290	46.427	30.798	30.497	30.177
T_Ω, лет	49 189	49 164	49 285	49 189	49 164	49 285	432 905	432 900	432 900	$1.9 \cdot 10^6$	$1.9 \cdot 10^6$	$1.9 \cdot 10^6$
T_ω, лет	305 000	348 500	313 500	305 000	348 500	313 500	305 000	348 500	313 500	$1.9 \cdot 10^6$	$2.0 \cdot 10^6$	$2.0 \cdot 10^6$

На интервале времени 10 млрд лет наблюдается вековой дрейф средних значений восходящих узлов всех орбит со скоростью $1°$/(млрд лет) для теории первого порядка и $46'$/(млрд лет) для теории второго порядка от начального значения $107°42'$.

4 Точность численного интегрирования

Точность численного интегрирования контролируется сохранением интеграла энергии системы. Относительная точность сохранения интеграла энергии составляет $2 \cdot 10^{-15}$ на интервале 10^{10} лет для обоих порядков теории движения. Интеграл площадей позволяет контролировать точность взаимного положения плоскостей орбит. При этом z-компонента интеграла площадей сохраняется с относительной точностью $2.5 \cdot 10^{-14}$ для первого порядка теории и $0.5 \cdot 10^{-14}$ для второго порядка теории на интервале времени 10^{10} лет. Несохранение x- и y-компонент интеграла площадей объясняется вековым дрейфом восходящих узлов орбит планет.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006) и Министерства образования и науки Российской Федерации (базовая часть государственного задания, РК №АААА-А17-117030310283-7).

Литература

Бискани (Biscani F.) // Piranha computer algebra system. 2017.
URL: http://github.com/bluescarni/piranha

Варади (Varadi F.) // NBI. A set of numerical integrators for the gravitational N-body problem. 1999.
URL: http://atmos.ucla.edu

Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. // Астрон. вестник. 2015. Т. 49. С. 469.

Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. // Астрон. вестник. 2016. Т. 50. С. 450.

Субботин М.Ф. // Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука. 1968.

Фолкнер и др. (Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H., Park R.S., Kuchynka P.) // IPN Progress Report. 2014. V. 42–196. P. 1.

Холшевников К.В. // Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во Лен. ун-та. 1985.

Эверхарт (Everhart E.) // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 35.