

УДК 523.942.4

Численное моделирование 2D сжимаемой солнечной конвекции и эволюция крупномасштабных динамических структур

К.В. Парчевский

Крымская астрофизическая обсерватория, 98409, Украина, Крым, Научный

Поступила в редакцию 24 июля 2003 г.

Аннотация. В результате численного моделирования турбулентной сжимаемой солнечной конвекции в двух измерениях в прямоугольной области $47.95 \text{ Мм} \times 7.99 \text{ Мм}$ доказано наличие спонтанно возникающих крупномасштабных структур с характерными размерами $15 \div 20 \text{ Мм}$ и временами жизни $20 \div 30$ часов, которые на Солнце могут быть отождествлены с супергранулами. Полученные результаты хорошо согласуются с супергрануляционной картиной, полученной из наблюдений SOHO/MDI. Показано, что высокотурбулентная приповерхностная конвекция возбуждает различные типы волн: звуковые, гравитационные. Получен спектр ($k-\omega$ диаграмма) гравитационных волн.

NUMERICAL SIMULATION OF 2D COMPRESSIBLE SOLAR CONVECTION, AND EVOLUTION OF LARGE-SCALE DYNAMIC STRUCTURES, *by K. V. Parchevsky*. Numerical 2D simulation of turbulent compressible solar convection in rectangular box $47.95 \text{ Мм} \times 7.99 \text{ Мм}$ shows an existence of spontaneously arising large-scale dynamic structures with the characteristic size of $15 \div 20 \text{ Мм}$ and the lifetime of $20 \div 30$ hours. On the Sun such structures can be identified with supergranules. SOHO/MDI observations show a presence of similar structures on the Sun. It is shown that high turbulent sub-surface convection excites different types of waves: acoustic, gravitational. Spectrum ($k-\omega$ diagram) of gravitational waves is obtained.

Ключевые слова: Солнце, конвекция, супергрануляция, численное моделирование

1 Введение

Солнце – это единственная звезда достаточно близкая к нам, чтобы можно было различать детали конвективных движений. С одной стороны, Солнце является лабораторией для тестирования моделей звездной конвекции, с другой – исследование солнечной конвекции имеет самостоятельный интерес. Динамика конвективной области Солнца является определяющей для таких глобальных явлений, как дифференциальное вращение, солнечное динамо и 11-ти летний цикл солнечной активности, возбуждение 5-мин. осцилляций. На поверхности мы видим проявление конвекции, как минимум, на двух различных масштабах – грануляции и супергрануляции. До сих пор не ясен вопрос, существуют ли промежуточные масштабы: мезогранулы (Новембер и др., 1981) и гигантские ячейки (Бек и др., 1998). В работе (Хатвей и др., 2000) авторы приходят к выводу, что мезогранулы отсутствуют как отдельный характерный масштаб солнечной конвекции. Ячеистая структура

с характерным размером мезогранул присутствует, но объясняется вкладом либо больших гранул, либо малых супергранул. Теория длины пути перемешивания говорит, что для каждого фиксированного уровня существует только один характерный размер конвективных ячеек, связанный со шкалой по давлению на этом уровне. Существование дискретных характерных масштабов дает указания на то, что солнечная конвекция может быть обусловлена чем-то большим, нежели простой стратификацией. В данной ситуации численное моделирование солнечной конвекции приобретает первоочередное значение. Существует два дополняющих друг друга подхода к описанию солнечной конвекции. Первый использует упрощенную физику, чтобы исследовать свойства конвекции в глубоких слоях с учетом кориолисовых сил (Бруммель и др., 1996; Вейсс и др., 1996; Эллиот и др., 1998). Как правило, эти расчеты невозможно продолжить до самой поверхности из-за введенных упрощающих предположений (Миеш, 2000). Другой подход, использующий реалистичные трехмерные расчеты конвекции (Атрошенко, 1993; Atroshchenko, Gadun, 1994; Штейн, Нордлунд, 1998, 2000), с большой точностью учитывает уравнение состояния вещества, перенос излучения в линиях, магнитное поле, и дает хорошее согласие с наблюдениями. Однако, такие расчеты требуют больших затрат процессорного времени и охватывают область всего в 1 – 2 гранулы. Для уверенного моделирования супергрануляции вычислительная область должна содержать десятки гранул, находиться вблизи поверхности и учитывать сжимаемость среды. В данной работе, используя упрощенную физику, мы попытались провести моделирование сжимаемой солнечной конвекции в двух измерениях в области, охватывающей по горизонтали несколько десятков гранул и простирающейся до глубины, где высокотурбулентные высокоскоростные приповерхностные движения вещества будут сильно подавлены. Основываясь на результатах численного моделирования, мы исследовали эволюцию отдельных гранул, их взаимодействие и горизонтальное движение и выявили наличие крупномасштабных структур, соответствующих на Солнце мезо- и супергрануляции. Мы также исследовали численную модель на наличие колебаний, возбуждаемых конвекцией, и нашли их спектр.

2 Основные уравнения

Эволюция вязкой сжимаемой сплошной среды в двух измерениях описывается полной системой уравнений гидродинамики без каких-либо упрощений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) &= -\rho g, \\
 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u(E + p - \tau_{xx}) - v\tau_{xy} + \dot{Q}_x \right] + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left[v(E + p - \tau_{yy}) - u\tau_{xy} + \dot{Q}_y \right] + \rho g v &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где p – давление, g – ускорение свободного падения. Вязкий тензор напряжений τ_{ij} задается следующим образом:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\eta \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\eta \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tag{2}$$

где η – динамическая вязкость среды. Согласно закону Фурье, локальные скорости переноса тепла на единицу площади в направлениях Ox и Oy пропорциональны градиенту температуры и равны соответственно

$$\dot{Q}_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dot{Q}_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{3}$$

где κ – теплопроводность. В качестве независимых переменных были выбраны ρ , ρu , ρv , E , где u и v – x и y компоненты скорости среды соответственно, E – полная энергия единицы объема, равная сумме внутренней e и кинетической энергий:

$$E = \rho \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (4)$$

Для замыкания системы, необходимо задать связь между давлением p , плотностью ρ и температурой среды T , так называемое уравнение состояния. Согласно Симону и Вейссу (Симон, Вейсс, 1968), различные масштабы конвекции могут быть обусловлены различной глубиной залегания слоев ионизации-рекомбинации водорода и гелия. Чтобы учесть эти эффекты, которые могут оказаться определяющими при моделировании супергрануляции, необходимо использовать реалистичное уравнение состояния. В данной работе используется уравнение состояния, учитывающее химический состав, возбужденные состояния, ионизацию и электронное экранирование. Уравнение состояния вычисляется путем интерполяции таблиц уравнения состояния OPAL, рассчитанных в Ливерморской национальной лаборатории (Роджерс и др., 1996; Роджерс, Найфонов, 2002). Предоставляемые таблицы для астрофизических приложений охватывают очень широкий диапазон температур, плотностей и концентраций водорода, гелия и тяжелых металлов. Прилагаемые программы интерполирования таблиц уравнения состояния общего вида работают чрезвычайно медленно и не подходят для использования совместно с программой расчета конвекции, так как уравнение состояния приходится решать в каждом узле сетки, при этом более 90% процессорного времени уходит на интерполирование таблиц. В нашем частном случае можно ввести ряд упрощений в интерполяционную процедуру. Во-первых, нет необходимости интерполирования по обилию тяжелых элементов Z и водорода X , так как хим. состав на всем протяжении конвективной зоны постоянен. Во-вторых, входными параметрами стандартных таблиц OPAL являются плотность и температура, заданные на неравномерных сетках, а в качестве независимых переменных в уравнениях гидродинамики используются плотность и внутренняя энергия единицы объема. Это приводит к тому, что приходится использовать итерационную процедуру для определения термодинамических величин, что резко увеличивает время счета. Таблицы OPAL были переинтерполированы на логарифмически равномерные сетки для случая постоянного хим. состава конвективной зоны Солнца так, чтобы входными параметрами стали плотность и внутренняя энергия. Таким образом, отпала необходимость в итеративной процедуре и поиске на неравномерной сетке, при этом скорость интерполирования возросла более чем на три порядка.

В уравнениях (1) удобно ввести безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{x}{L}, & t &\rightarrow \frac{a_0}{L}t, & \rho &\rightarrow \frac{\rho}{\rho_0}, & p &\rightarrow \frac{p}{p_0}, \\ u &\rightarrow \frac{u}{a}, & T &\rightarrow \frac{T}{T_0}, & T_0 &= \frac{p_0}{\rho_0 R}, & a_0^2 &= \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где величины с индексом 0 отнесены к некоторому опорному состоянию, c_0 – скорость звука, L – характерный линейный размер вычислительной области, $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты. В качестве опорного состояния удобно выбрать состояние среды на верхней границе вычислительной

области. После введения безразмерных переменных, уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + \frac{p}{\gamma} - \tau_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v^2 + \frac{p}{\gamma} - \tau_{yy} \right) + \frac{\rho g}{Fr^2} &= 0, \\
 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(E + \frac{p}{\gamma} - \tau_{xx} \right) - v \tau_{xy} + \dot{Q}_x \right] + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(E + \frac{p}{\gamma} - \tau_{yy} \right) - u \tau_{xy} + \dot{Q}_y \right] + \frac{\rho g v}{Fr^2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где безразмерные параметры

$$Re = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}, \quad Fr^2 = \frac{a_0^2}{gL} \tag{7}$$

представляют собой числа Рейнольдса, Прандтля и Фруда соответственно. Компоненты вязкого тензора напряжений в безразмерных переменных будут выглядеть следующим образом:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{8}$$

Локальные скорости переноса тепла в безразмерных переменных (5) равны

$$\dot{Q}_x = -\frac{1}{Re Pr (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dot{Q}_y = -\frac{1}{Re Pr (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{9}$$

В настоящее время невозможно провести прямое моделирование (согласно с терминологии, принятой в вычислительной гидродинамике) полных уравнений гидродинамики для конвективной зоны Солнца. Большие характерные числа Рейнольдса $Re = 10^{12} \div 10^{13}$ приводят к тому, что приходится учитывать огромный диапазон динамических масштабов, порядка $Re^{9/4} \sim 10^{27}$ (Лежур, 1990), что невозможно при современном уровне вычислительной техники. Все существующие модели солнечной конвекции можно отнести к классу моделей крупных вихрей (в иностранной литературе Large Eddy Simulations), в которых явно разрешаются только наиболее крупномасштабные конвективные моды. Оставшиеся мелкомасштабные моды параметризуются посредством различных подсеточных моделей турбулентности (sub-grid-scale models). SGS модели обязаны быть, по своей природе, диссипативными. Для описания турбулентного переноса энергии и импульса в данной работе использовалась простая градиентная модель турбулентности в трактовке Смагоринского (Смагоринский, 1963). Этот подход основан на расщеплении независимых переменных на взвешенные по массе средние и флуктуационные части (Флетчер, 1991)

$$\begin{aligned}
 u &= \tilde{u} + u'', & T &= \tilde{T} + T'', \\
 \tilde{u} &= \overline{\rho u} / \bar{\rho}, & \tilde{T} &= \overline{\rho T} / \bar{\rho},
 \end{aligned}$$

Взвешенное по массе осреднение применяется ко всем переменным, кроме плотности и давления, которые расщепляются обычным образом

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p'.$$

Если пренебречь некоторыми малыми флуктуационными членами, то тензор вязких напряжений и поток тепла в терминах средних и флуктуационных величин принимает вид

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u_i'' u_j''}, \quad \dot{Q}_i = -k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} + c_p \overline{\rho T'' u_i''}.$$

Для замыкания системы надо связать средние от флуктуационных величин с осредненными параметрами течения. В данной работе турбулентность учитывалась введением турбулентной вязкости η_t и турбулентной теплопроводности k_t , когда предполагается, что вторые слагаемые имеют ту же тензорную структуру, что и первые слагаемые, за исключением того, что вместо η и k стоят

$$\eta_t = \rho \Delta^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}, \quad k_t = \frac{c_p \eta_t}{Pr_t}$$

где Δ – длина пути перемешивания. Так как мы хотим моделировать подсеточную турбулентность, то в нашем случае Δ представляет собой характерный размер сеточной ячейки и $\Delta^2 = \Delta x \Delta y$. Чтобы включить модель турбулентности в безразмерные уравнения (6), необходимо провести следующую замену:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} &\rightarrow \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t}, & \frac{1}{RePr} &\rightarrow \frac{1}{RePr} + \frac{1}{Re_t Pr_t}, \\ \frac{1}{Re_t} &= \frac{\mu_t}{\rho_0 a_0 L} = C \rho \Delta^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $C = 0.2$ – эмпирическая безразмерная константа.

3 Численная схема

Система уравнений (6), записанная в, так называемой, дивергентной или консервативной форме, может быть переписана в виде одного векторного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

где $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T$ – вектор независимых переменных. Использование консервативной формы уравнений исключительно важно в задачах с ударными волнами и другими разрывами. В некоторых случаях, при дискретизации уравнений, записанных в неконсервативной форме, можно получить неправильную скорость распространения разрыва (Левек, 1998). При дискретизации уравнений, записанных в консервативной форме, правильная скорость разрыва получается автоматически. Для решения уравнения (11) была использована явная схема Мак Кормака (Йи, 1989). Применительно к уравнению (11) она может быть записана в следующем виде:

Шаг предиктор:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{j,k}^* &= \mathbf{q}_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1,k}^n - \mathbf{F}_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{G}_{j,k+1}^n - \mathbf{G}_{j,k}^n) - \Delta t \mathbf{S}_{j,k}^n \\ \mathbf{F}_{j,k}^n : & \begin{matrix} 0 \leq j \leq N_x + 1 \\ 0 \leq k \leq N_y \end{matrix}, & \mathbf{G}_{j,k}^n : & \begin{matrix} 0 \leq j \leq N_x & 0 \leq j \leq N_x \\ 0 \leq k \leq N_y + 1 & 0 \leq k \leq N_y \end{matrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Шаг корректор:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{j,k}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{q}_{j,k}^n + \mathbf{q}_{j,k}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j,k}^* - \mathbf{F}_{j-1,k}^*) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{G}_{j,k}^* - \mathbf{G}_{j,k-1}^*) - \Delta t \mathbf{S}_{j,k}^n \right] \\ \mathbf{F}_{j,k}^* : & \begin{matrix} 0 \leq j \leq N_x - 1 \\ 1 \leq k \leq N_y - 1 \end{matrix}, & \mathbf{G}_{j,k}^* : & \begin{matrix} 1 \leq j \leq N_x - 1 & 1 \leq j \leq N_x - 1 \\ 0 \leq k \leq N_y - 1 & 1 \leq k \leq N_y - 1 \end{matrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Производные $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}$ в уравнении (11) аппроксимируются односторонними конечноразностными операторами. Величины \mathbf{F} и \mathbf{G} , в свою очередь, содержат производные по пространственным переменным. Схема в целом будет иметь второй порядок точности по времени и по пространству, если для аппроксимации производных $\frac{\partial}{\partial x}$ в \mathbf{F} ($\frac{\partial}{\partial y}$ в \mathbf{G}) на шаге предиктор будут использоваться односторонние разности назад (обратные тем, которые использовались для аппроксимации производных

$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}$ в (12)). Аналогично, на шаге корректор производные $\frac{\partial}{\partial x}$ в \mathbf{F}^* ($\frac{\partial}{\partial y}$ в \mathbf{G}^*) должны аппроксимироваться односторонними разностями вперед (обратными тем, что использовались для аппроксимации производных $\frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial y}$ в (13)). Остальные производные должны аппроксимироваться центральными разностями. Ниже приводятся явные формулы для разностной аппроксимации \mathbf{F} и \mathbf{F}^* :

$$\mathbf{F}_{jk}^n = \begin{pmatrix} (\rho u)_{jk}^n \\ (\rho u^2)_{jk}^n + \frac{p_{jk}^n}{\gamma} - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left(2 \frac{u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n}{\Delta x} - \frac{v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n}{2\Delta y} \right) \\ (\rho uv)_{jk}^n - \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2\Delta y} + \frac{v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n}{\Delta x} \right) \\ u_{jk}^n \left[E_{jk}^n + \frac{p_{jk}^n}{\gamma} - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left(2 \frac{u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n}{\Delta x} - \frac{v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n}{2\Delta y} \right) \right] \\ - \frac{v_{jk}^n}{Re} \left(\frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2\Delta y} + \frac{v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{RePr(\gamma-1)} \frac{T_{jk}^n - T_{j-1,k}^n}{\Delta x} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{jk}^* = \begin{pmatrix} (\rho u)_{jk}^* \\ (\rho u^2)_{jk}^* + \frac{p_{jk}^*}{\gamma} - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left(2 \frac{u_{j+1,k}^* - u_{jk}^*}{\Delta x} - \frac{v_{j,k+1}^* - v_{j,k-1}^*}{2\Delta y} \right) \\ (\rho uv)_{jk}^* - \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{j,k+1}^* - u_{j,k-1}^*}{2\Delta y} + \frac{v_{j+1,k}^* - v_{jk}^*}{\Delta x} \right) \\ u_{jk}^* \left[E_{jk}^* + \frac{p_{jk}^*}{\gamma} - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left(2 \frac{u_{j+1,k}^* - u_{jk}^*}{\Delta x} - \frac{v_{j,k+1}^* - v_{j,k-1}^*}{2\Delta y} \right) \right] \\ - \frac{v_{jk}^*}{Re} \left(\frac{u_{j,k+1}^* - u_{j,k-1}^*}{2\Delta y} + \frac{v_{j+1,k}^* - v_{jk}^*}{\Delta x} \right) - \frac{1}{RePr(\gamma-1)} \frac{T_{j+1,k}^* - T_{jk}^*}{\Delta x} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Аналогичные формулы можно записать и для конечно-разностной аппроксимации \mathbf{G} и \mathbf{G}^* . Здесь и далее индексом 0 обозначены величины на нижней грани, а не величины в опорном состоянии, как ранее. Это не может привести к недоразумению, так как уравнения записаны в безразмерных переменных. При необходимости сослаться на параметры опорной модели это будет отмечено особо. Выбор именно этой численной схемы был обусловлен тем, что схемы более высоких порядков, как правило, требуют большей гладкости как самого решения, так и начальных и граничных условий. Плотность в подфотосферных слоях Солнца очень быстро растет с глубиной, меняясь почти в 2000 раз между верхней и нижней границами вычислительной области. Солнечная конвекция является исключительно высокотурбулентной, что приводит к большим градиентам скорости. Все вышесказанное приводит к тому, что численные схемы высоких порядков начинают проявлять неустойчивость. Схема Мак Кормака (12, 13) стабильно ведет себя при резком, почти скачкообразном изменении плотности вблизи поверхности Солнца.

Как у любой явной схемы, у схемы Мак Кормака есть ограничение на шаг по времени, связанное с устойчивостью. Для сжимаемых уравнений Навье-Стокса когда $\Delta x = \Delta y$ использовалась следующая оценка (Флетчер, 1991)

$$\Delta t \leq \Delta x^2 \left[\frac{2\eta}{Re\rho} \left(\frac{2\gamma}{Pr} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \Delta x(|u| + |v| + c_0\sqrt{2}) \right]^{-1} \quad (16)$$

4 Начальные и граничные условия

Предположим, что среда заключена в прямоугольный ящик с непроницаемыми верхней и нижней гранями. Ящик подогревается снизу. Благодаря наличию температурного градиента между верхней

и нижней гранями, на которых наложены условия Дирихле

$$\begin{aligned} \text{верхняя граница:} \quad T_{j,N_y} &= 1, & u_{j,N_y} &= v_{j,N_y} = 0 \\ \text{нижняя граница:} \quad T_{j,0} &= 1 + \Delta T & u_{j,0} &= v_{j,0} = 0 \end{aligned}$$

возникают конвективные движения среды. Для дальнейших расчетов нам необходимо уметь вычислять градиенты скорости на верхней и нижней границах. Для аппроксимации $\frac{\partial}{\partial y}$ конечно-разностным оператором с центральными разностями на верхней и нижней границах мы вынуждены расширить нашу вычислительную область, введя в рассмотрение нефизические узлы сетки $(j, -1)$ и $(j, N_y + 1)$ для $j = 0, 1, \dots, N_x$. С помощью интерполяции можно найти скорости в нефизических узлах следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_{j,1} + u_{j,-1}) &= u_{j,0} \equiv 0, & \frac{1}{2}(u_{j,N_y-1} + u_{j,N_y+1}) &= u_{j,N_y} \equiv 0, \\ u_{j,-1} &= -u_{j,1}, & u_{j,N_y+1} &= -u_{j,N_y-1}. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы могут быть выписаны для y -компоненты. Теперь нетрудно записать конечно-разностную аппроксимацию производных:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{j,0} &= \frac{u_{j,1} - u_{j,-1}}{2\Delta y} = \frac{u_{j,1}}{\Delta y}, & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{j,N_y} &= \frac{u_{j,N_y+1} - u_{j,N_y-1}}{2\Delta y} = -\frac{u_{j,N_y-1}}{\Delta y}, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{j,0} &= \frac{v_{j,1} - v_{j,-1}}{2\Delta y} = \frac{v_{j,1}}{\Delta y}, & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{j,N_y} &= \frac{v_{j,N_y+1} - v_{j,N_y-1}}{2\Delta y} = -\frac{v_{j,N_y-1}}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Граничные условия для давления и плотности должны быть согласованы с системой уравнений во внутренних точках сетки. Рассмотрим ячейки, расположенные между горизонтальными слоями $k = 0$ и $k = 1$ пространственной сетки. Нижняя граница ячеек совпадает с нижней границей вычислительной области. На нижней границе известно значение T_0 из граничных условий, а на следующем слое известны p_1 , ρ_1 и T_1 из решения сеточных уравнений во внутренней области. Следовательно, остается определить p_0 и ρ_0 . На нижней границе имеем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dy} &= -\frac{\gamma g}{Fr^2} \rho, \\ p &= \rho RT, & R &= p_1 / \rho_1 T_1, \\ T &= T_0 - \frac{\Delta T}{\Delta y} y, & \Delta T &= T_0 - T_1, \end{aligned} \tag{17}$$

где y меняется от 0 на нижней границе ячейки до Δy . Здесь введено предположение, что на протяжении ячейки ускорение свободного падения g постоянно, температура линейно изменяется и газ локально идеален, то есть R , вычисленная на слое $k = 1$, остается постоянной. При этих предположениях система (17) может быть решена аналитически

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{1 - \frac{\Delta T}{T_0 \Delta y} y}{1 - \frac{\Delta T}{T_0}} \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T} - 1}, \quad p = p_1 \left(\frac{1 - \frac{\Delta T}{T_0 \Delta y} y}{1 - \frac{\Delta T}{T_0}} \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T}} \tag{18}$$

Чтобы найти давление и плотность на нижней границе, достаточно подставить $y = 0$ в (18). Аналогичные решения можно написать и в окрестности верхней границы. Рассмотрим ячейки между слоями $k = N_y - 1$ и $k = N_y$. Верхняя граница ячеек совпадает с верхней границей вычислительной области. Введем локальную систему координат так, чтобы y менялось от 0 на $N_y - 1$ горизонтальном слое до Δy на верхней границе (слое N_y). Тогда решение для таких ячеек имеет вид

$$\rho = \rho_{N_y-1} \left(1 - \frac{\Delta T}{T_{N_y-1} \Delta y} y \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T} - 1}, \quad p = p_{N_y-1} \left(1 - \frac{\Delta T}{T_{N_y-1} \Delta y} y \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T}}, \tag{19}$$

где $R = p_{N_y-1}/\rho_{N_y-1}T_{N_y-1}$, $\Delta T = T_{N_y-1} - T_{N_y}$. Подставляя $y = \Delta y$ в (19), можно получить значения давления и плотности на верхней границе вычислительной области. Резюмируя, для граничных и нефизических узлов сетки имеем:

нижняя граница	верхняя граница
$p_{j,0} = p_{j,1} \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T}}$	$p_{j,N_y} = p_{j,N_y-1} \left(\frac{T_{N_y}}{T_{N_y-1}} \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T}}$
$R = \frac{p_1}{\rho_1 T_1}$	$R = \frac{p_{N_y-1}}{\rho_{N_y-1} T_{N_y-1}}$
$p_{j,-1} = 2p_{j,0} - p_{j,1}$	$p_{j,N_y+1} = 2p_{j,N_y} - p_{j,N_y-1}$
$\rho_{j,0} = \rho_{j,1} \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T} - 1}$	$\rho_{j,N_y} = \rho_{j,N_y-1} \left(\frac{T_{N_y}}{T_{N_y-1}} \right)^{\frac{\gamma g \Delta y}{Fr^2 R \Delta T} - 1}$
$\rho_{j,-1} = 2\rho_{j,0} - \rho_{j,1}$	$\rho_{j,N_y+1} = 2\rho_{j,N_y} - \rho_{j,N_y-1}$
$T_{j,-1} = 2T_{j,0} - T_{j,1}$	$T_{j,N_y+1} = 2T_{j,N_y} - T_{j,N_y-1}$

(20)

Для боковых стенок задаются симметричные граничные условия

$$v_{left} = v_{right}, \quad u_{left} = -u_{right}.$$

Давление, плотность и температура должны быть непрерывными на боковых гранях.

В качестве начальных условий используется статичное состояние стандартной модели Солнца, рассчитанное Кристенсенем-Далсгартом (1982, 1993). Эта модель широко используется в гелиосейсмологии. Так как модель с необходимой точностью не удовлетворяет условиям гидростатического равновесия, используется следующий прием для внесения необходимых поправок. Профиль плотности берется из модели. Профиль давления получается интегрированием уравнения гидростатического равновесия (учитывается изменение ускорения свободного падения с глубиной). Профиль температуры вычисляется из уравнения состояния интерполированием таблиц OPAL.

Чтобы при численном моделировании обеспечить “мягкий” старт конвекции без возникновения ударных волн, вводится “затравочное” поле скоростей малой амплитуды с $\text{div } \mathbf{v} = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A \sin(2\pi x) \cos(\pi y), \\ v(x, y) &= -A \cos(2\pi x) \sin(\pi y). \end{aligned} \quad (21)$$

Амплитуда скоростей A в 10^5 раз меньше, чем средние конвективные скорости среды после установления равновесия.

5 Результаты и обсуждение

Моделирование солнечной сжимаемой конвекции проводилось в прямоугольной области с отношением сторон 6:1 и сеткой, содержащей 600×100 узлов. Геометрический размер вычислительной области составлял $L = 47.95$ Мм по горизонтали и $H = 7.99$ Мм по вертикали. Отношение плотностей среды на нижней и верхней гранях равнялось $\rho_b/\rho_t = 1800$. Для интегрирования системы уравнений (6) в безразмерных переменных использовался явный метод Мак Кормака (12, 13). Шаг по времени $t = 1.04$ с выбирался в соответствии с ограничением Куранта (16). Общая продолжительность моделирования составляла 9.317 суток солнечного времени (775000 итераций, 68 часов процессорного времени компьютера на базе процессора Pentium III с тактовой частотой 1 ГГц). После окончания переходного процесса на 265000-й итерации начали выводиться результаты счета.

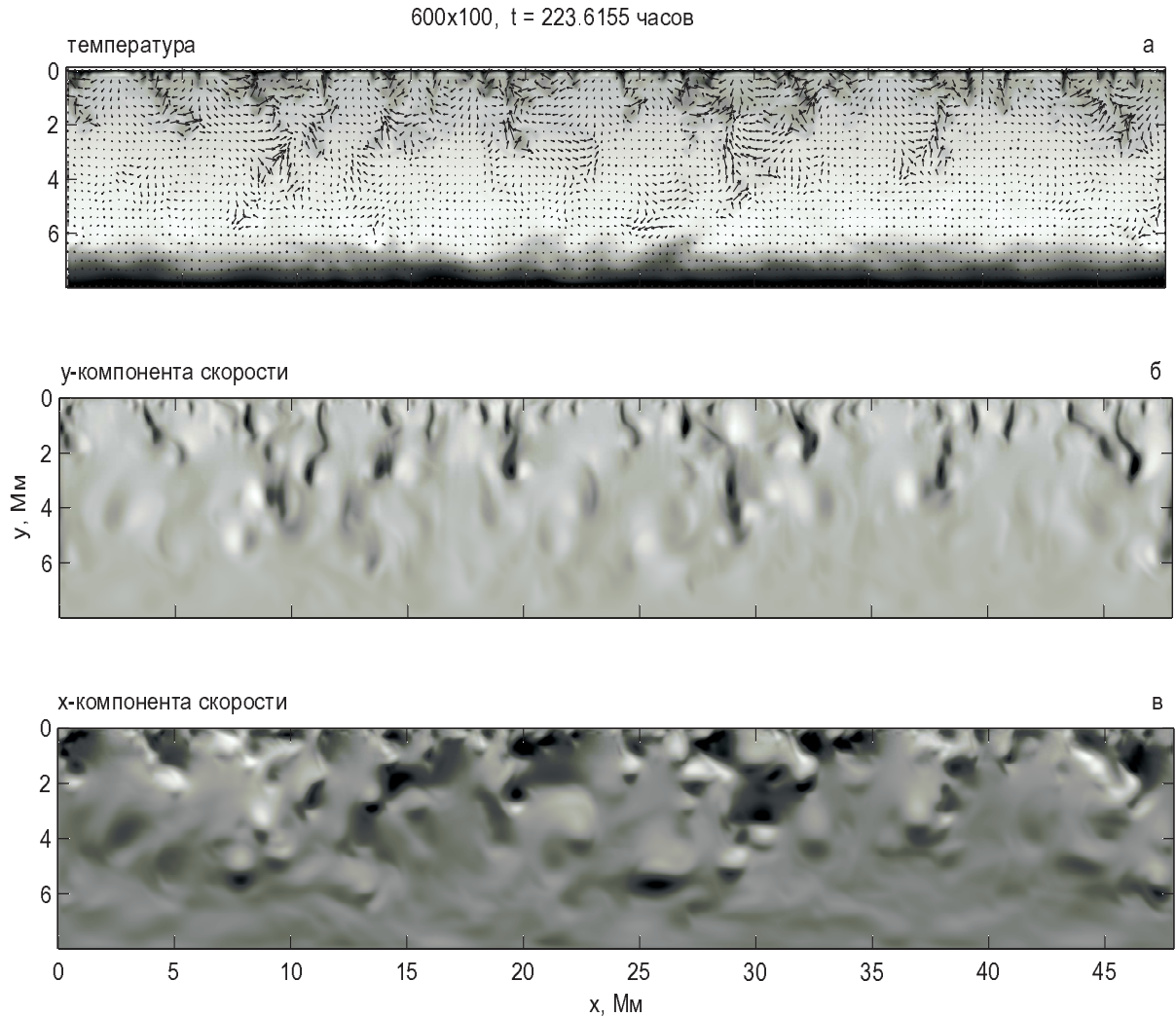


Рис. 1. Карты распределений температуры (а), у и х-компонент скорости (б,в) в вычислительной области по окончании переходных процессов. Яркостью на рис. а помечена разность температур среды нашей модели и модели с линейным ростом температуры. Стрелками показан полный вектор скорости вещества

Промежуточные результаты сохранялись с интервалом в 100 итераций ($t_{out} = 104$ с) в виде файлов, содержащих значения температуры, плотности и скоростей, а также в виде фильма, кадрами которого являлись карты распределения температуры.

На рис. 1 показан один из кадров фильма. Яркостью помечена разность температур среды нашей модели и модели с линейным ростом температуры. Темные участки обозначают области с температурой ниже, чем в модели с постоянным градиентом. Светлые – с более высокой температурой. Стрелками показаны направления и скорости среды. Сохранено соотношение 6:1 сторон вычислительной области. На рисунках 1б,в показаны, соответственно, карты вертикальной и горизонтальной составляющих скорости.

Характерной особенностью солнечной конвекции является быстрое остывание вещества в приповерхностном слое и образование, так называемых, даундрафтсов (в иностранной литературе down-drafts) компактных, сравнительно холодных образований, движущихся вниз с большой скоростью

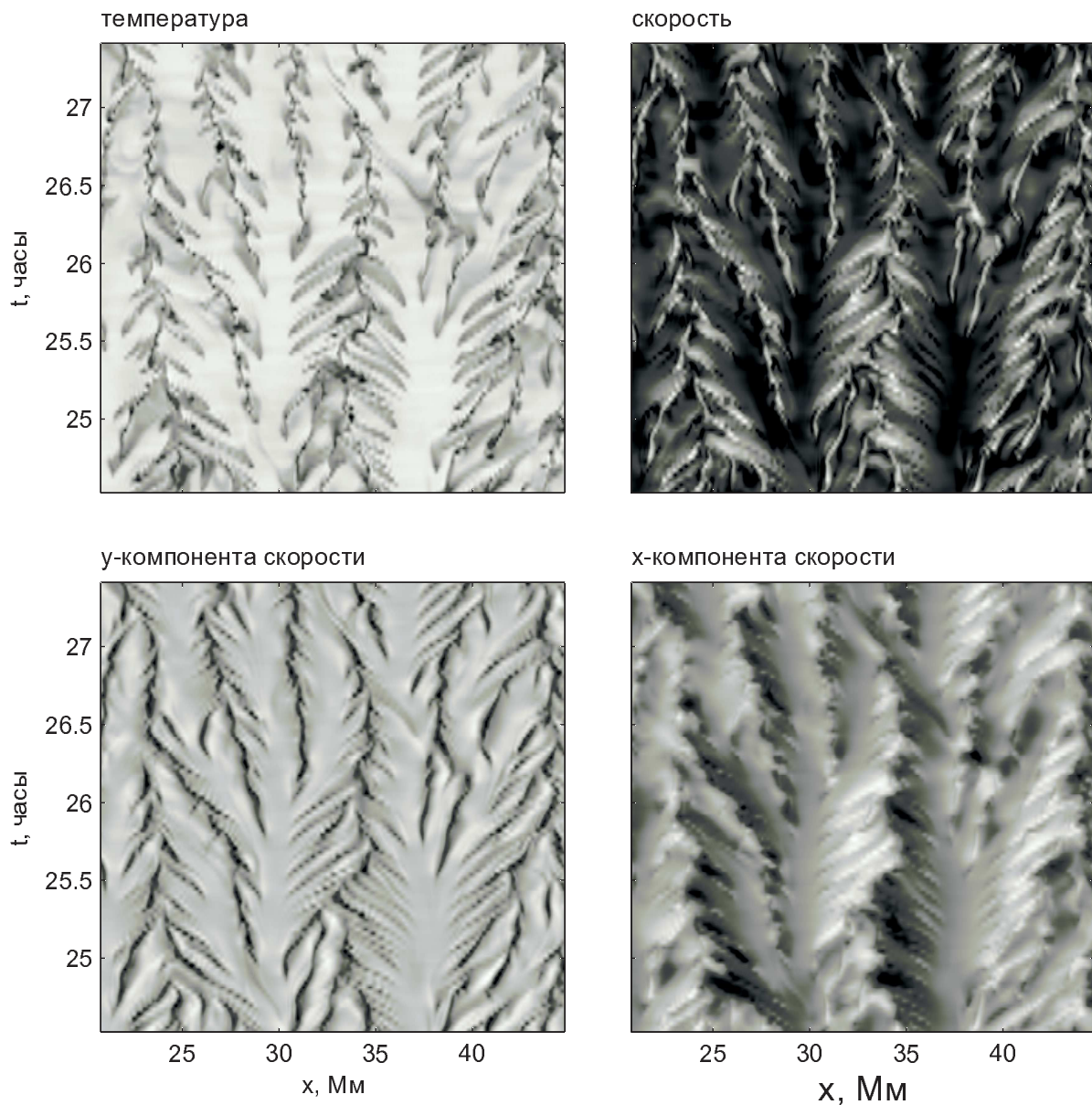


Рис. 2. Пространственно-временные диаграммы температуры и скорости для слоя на глубине 0.55943 Мм, считая от верхней границы вычислительной области. Медленно поднимающееся горячее вещество смывает даундрафтсы вправо и влево от оси подъема, что приводит к появлению характерных “елочек” на диаграммах

10.433 ± 0.046 км/с и проникающих глубоко в область с более спокойными движениями. Они образуют тонкие стенки гранул. В центре гранулы происходит подъем горячего вещества со значительно меньшими скоростями 5.270 ± 0.023 км/с. Характерное время жизни гранулы составляет 10 ÷ 15 мин.

Чтобы проследить закономерности в движении гранул, необходимо построить так называемую пространственно-временную (time-distance) диаграмму. Для этого выберем горизонтальный срез

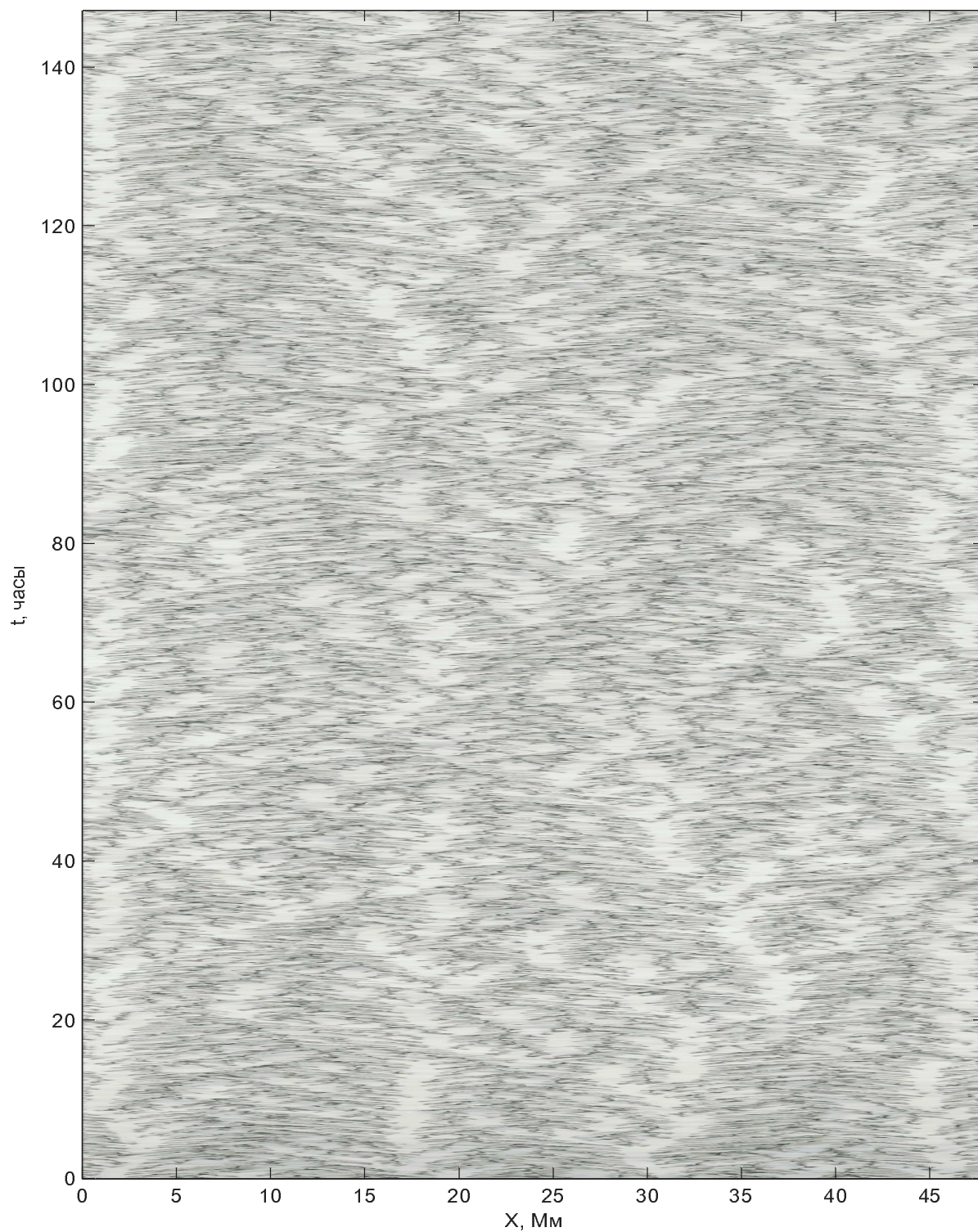


Рис. 3. Пространственно-временная диаграмма для среза вблизи верхней границы вычислительной области на глубине 0.56 Мм. Цветом показано отклонение температуры от значения, которое было бы на данной глубине при линейном росте температуры с глубиной. Светлые участки соответствуют горячему медленно поднимающемуся веществу. Видны характерные крупномасштабные структуры, которые могут быть отождествлены с супергранулами

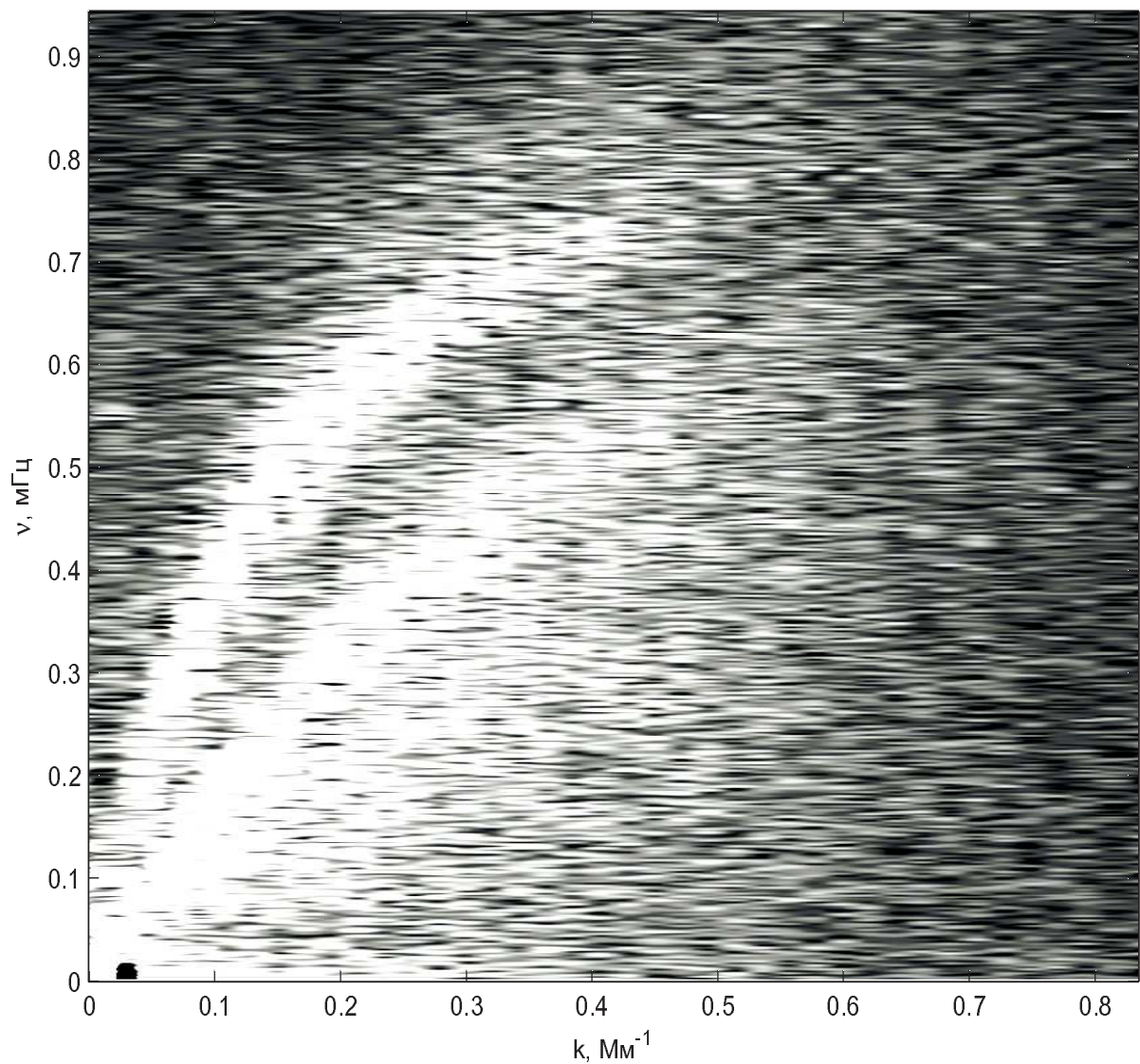


Рис. 4. Дисперсионные соотношения ($k - \omega$ диаграмма) для гравитационных волн, возбуждаемых турбулентной конвекцией вблизи дна вычислительной области. Отчетливо просматривается гребневидная структура, характерная для 5-мин. колебаний

вычислительной области на интересующей нас глубине и проследим его эволюцию во времени. На рис. 2 показаны пространственно-временные диаграммы температуры и скорости для слоя на глубине 0.55943 Мм, считая от верхней границы вычислительной области. По оси ОХ отложена горизонтальная координата в мегаметрах (1000 км), по вертикальной оси время в часах. Горизонтальные движения даундрафтсов приводят к появлению характерных “елочек” на диаграммах. Нетрудно отождествить отдельные характерные детали на всех рисунках. На рис. 2а показано поле температуры. Темные области соответствуют холодному веществу, движущемуся вниз. Об этом говорит темная окраска соответствующих деталей на рис. 2в, представляющем карту вертикальной составляющей скорости. “Ветки”, имеющие положительный наклон, формируются даундрафтсами, движущимися слева на право к центральному “стволу”, отрицательный – даундрафтсами, движущи-

мися справа на лево. Это иллюстрируется рисунком 2г, на котором показана карта горизонтальной составляющей скорости. Левые “ветки” имеют светлую окраску, что говорит о том, что вещество там движется в положительном направлении оси Ox (т.е. вправо). Правые “ветки”, соответственно, имеют темную окраску. Там вещество движется влево.

Горизонтальные движения даундрафтсов возникают из-за наложения на сравнительно мелко-масштабную высокотурбулентную картину грануляции более медленных крупномасштабных движений. При этом, поднимающееся горячее вещество у поверхности начинает растекаться в стороны, “смывая” как целое даундрафтсы вправо и влево от оси подъема. Вновь появляющиеся в этом месте даундрафтсы “смываются” аналогичным образом, причем с той же горизонтальной скоростью, которая определяется горизонтальной скоростью растекания поднимающегося горячего вещества. Так формируются почти параллельные “ветки” и “елочки”. Характерная долгоживущая “елочка” расположена на рисунке 2 в окрестности 34 Мм. На рисунке 2б показана пространственно-временная диаграмма для модуля скорости среды. Здесь “елочки” имеют светлую окраску, в отличие от темных промежутков между ними. Это говорит о том, что скорости даундрафтсов, движущихся вниз, намного больше скоростей поднимающегося горячего вещества.

Наблюдения показывают наличие на поверхности более крупномасштабных чем грануляция структур супер- и мезогрануляции. Эти структуры не видны при непосредственных наблюдениях так как амплитуда соответствующих скоростей не высока и картина “замывается” высокоскоростными мелко-масштабными грануляционными движениями. Супергрануляция проявляется только при построении карт горизонтальной скорости гранул или пространственно-временных диаграмм. Чтобы проследить возникают ли подобные крупномасштабные структуры при численном моделировании, мы построили пространственно-временную диаграмму для всей длины вычислительной области $L = 47.95$ Мм, охватывающую интервал времени в 147.3 часа. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 3. На пространственно-временной диаграмме видны крупномасштабные структуры с характерным размером $15 \div 20$ Мм и характерным временем жизни $20 \div 30$ часов. Полученные результаты хорошо согласуются с супергрануляционной картиной, полученной из наблюдений SOHO/MDI (Шайн и др., 2000).

Высокотурбулентная приповерхностная конвекция возбуждает различные типы волн: звуковые, гравитационные. Для поиска стоячих волн в нашей модели и определения для них дисперсионного соотношения было построено двумерное Фурье-преобразование пространственно-временной диаграммы аналогичной рис. 4, но вычисленной для слоя на глубине $h = 6.234$ Мм вблизи дна вычислительной области. Отчетливо просматриваются три характерных гребня подобные тем, что видны на спектре 5-мин. солнечных осцилляций.

Литература

- Атрощенко И.Н. // Кинематика и физика небесных тел. 1993. Т. 9. С. 3.
 Атрощенко, Гадун (Atroshchenko I.N., Gadun A.S.) // *Astron. Astrophys.* 1994. V. 291. P. 635.
 Бек и др. (Beck J.G., Duvall Jr. T.L., Scherrer P.H.) // *Nature.* 1998. V. 394. P. 653.
 Бруммель и др. (Brummel N.H., Hurlburt N.E., Toomre J.) // *Astrophys. J.* 1996. V. 473. P. 494.
 Вейсс и др. (Weiss N.O., Brownjohn D.P., Matthews P.C., Proctor M.R.E.) // *MNRAS* 1996. V. 283. P. 1153.
 Йи (Yee H.C.) // A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods. NASA technical memorandum 101088. NASA Ames Research Center, 1989.
 Кристенсен-Далсгард (Christensen-Dalsgaard J.) // *MNRAS* 1982. V. 199. P. 735.
 Кристенсен-Далсгард и др. (Christensen-Dalsgaard J., Proffitt C.R., Thompson M.J.) // *Astrophys. J.* 1993. V. 403. L 75.
 Левек (LeVeque R.J.) // Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow: Saas-Fee Advanced Course 27, Lecture Notes 1997 Swiss Society for Astrophysics and Astronomy / Еды. Steiner O., Gautchy A. Berlin, Heidelberg: Springer. 1998. P. 514.
 Миеш (Miesch M.S.) // *Solar Phys.* 2000. V. 192. P. 59.

- Новембер и др. (November L.J., Toomre J., Gebbie K.B., Simon G.W.) // *Astrophys. J.* 1981. V. 245. L 123.
- Роджерс и др. (Rogers F.J., Swenson F.J., Iglesias C.A.) // *Astrophys. J.* 1996. V. 456. P. 902.
- Роджерс, Найфонов (Rogers F.J., Nayfonov A.) // *Astrophys. J.* 2002. V. 576. P. 1064.
- Симон, Вейсс (Simon G.W., Weiss N.O.) // *Z. Astrophys.* 1968. V. 69. P. 435.
- Смагоринский (Smagorinsky J.) // *Mon. Weather Rew.* 1963. V. 917. P. 99.
- Флетчер К. // *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир.* 1991.
- Хатвей и др. (Hathaway D.H., Beck J.G., Bogart R.S., Bachmann K.T., Khatri G., Petitto J.M., Han S., Raymond J.) // *Solar Phys.* 2000. V. 193. P. 495.
- Шайн и др. (Shine R.A., Simon G.W., Hurlburt N.E.) // *Solar Phys.* 2000. V. 193. P. 509.
- Штейн, Нордлунд (Stein R.F., Nordlund A.) // *Astrophys. J.* 1998. V. 499. P. 914.
- Штейн, Нордлунд (Stein R.F., Nordlund A.) // *Solar Phys.* 2000. V. 192. P. 91.
- Эллиот и др. (Elliott J.R., Miesch M.S., Toomre J., Clune T.C., Glatzmaier G.A.) // *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars. Proc. SOHO/GONG 98 Workshop / Eds. Korzennik S.G., Wilson A. ESA:Nordwijk.* 1998. P. 765.