Изв. Крымской Астрофиз. Обс. 105, № 1, 212–215 (2009)

ИЗВЕСТИЯ
КРЫМСКОЙ
АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ
ОБСЕРВАТОРИИ

УДК 521.937

О геометрическом методе определения масс галилеевых спутников Юпитера

Г.С. Курбасова

НИИ "Крымская астрофизическая обсерватория", 98409, Украина, Крым, Научный
gsk@simeiz.ylt.crimea.com

Поступила в редакцию 5 февраля 2009 г.

Аннотация. Предлагается геометрический метод вычисления относительных масс галилеевых спутников Юпитера. Для каждой пары "планета-спутник" вычислены локальные характеристики, совпадающие с размерностью Хаусдорфа-Безиковича. Относительные величины масс, вычисленные геометрическим методом, отличаются от полученных из анализа движения космических аппаратов не более чем на 0.1 %.

ABOUT THE MODE OF MOVEMENT OF THE POLE OF THE EARTH ON TO THE DATA FOR PERIOD 1962–2007, *by G.S. Kurbasova.* A geometric method for calculating the relative masses Galilean satellites of Jupiter. For each pair "planet-satellite" calculated local characteristics similar to the Hausdorff-Bezikovich dimension. The relative size of the mass, calculate the geometrical method, different from the analysis of traffic from the spacecraft no more than 0.1 %.

Ключевые слова: Масса, спутники, Юпитер, фрактал

1 Введение

Солнечная система представляет собой иерархическую структуру, обусловленную ее происхождением и последующей эволюцией по космическим законам.

О принадлежности небесных тел Солнечной системе свидетельствуют общие крупномасштабные характеристики. В то же время присущие отдельным элементарным структурам "планета-спутник" индивидуальные свойства определяют их пространственное положение и связи в системе: планеты и спутники могут существовать только в определенной области расстояний от ведущего тела, внутренняя поверхность которой для больших спутников зависит от разрушающего взаимодействия приливных сил, а внешняя определяется условиями стабильности орбит под возмущающим действием Солнца.

В ограниченной области существования структуры "планета-спутник" формируются устойчивые пропорции между физическими и геометрическими параметрами, что обеспечивает их взаимную определяемость.

В настоящей работе описана возможность определения одной из главных физических характеристик спутниковых систем – отношения массы спутника к массе ведущей его планеты, исходя из геометрических параметров: среднего расстояния между центрами масс и экваториальных радиусов ведущего и ведомого тела. Отношения масс вычислены для системы Юпитер – галилеевы спутники. Метод вычисления основан на применении аппарата фрактальной геометрии.

Необходимость альтернативного метода определения отношения масс становится понятной, если учесть, что до недавнего времени масса какого-либо спутника могла быть оценена только в том случае, если спутник вызывает заметные периодические или вековые возмущения в движении близких к нему спутников.

Движение трех внутренних галилеевых спутников Юпитера носит сложный характер из-за возмущений, обусловленных тройным резонансом. В этом случае невозможно получить аналитическое описание возмущений для определения масс спутников в сочетании с наблюдениями.

Наземные измерения масс галилеевых спутников дают значения, формальные ошибки которых около 10 %.

Наиболее точные значения отношений масс получены в последнее время из анализа движения космических аппаратов. Эти данные служат для апробации геометрического метода в настоящей работе.

2 Геометрическая интерпретация отношения масс μ

Определим величину

$$\gamma = \sqrt{1 + (4\lambda)^2}, \tag{1}$$

где $2\lambda = \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}$.

Выражение $\frac{\gamma}{4}$ представим с помощью экспоненциальных функций в виде:

$$\frac{\gamma}{4} = \frac{1 - \exp^{-2x}}{1 + \exp^{-2x}} \tag{2}$$

или

$$\frac{\gamma}{4} = thx, \tag{3}$$

где thx – гиперболический тангенс, аргумент которого равен площади сектора, ограниченного одной из ветвей равнобочной гиперболы и отрезками касательных, проходящих через начало координат.

Покажем, что величину $D = 2x$ можно определить исходя из геометрических свойств локального пространства “планета-спутник”. С этой целью проведем анализ геометрических связей в пространстве Юпитер – галилеевы спутники.

3 Геометрические связи в пространстве галилеевых спутников Юпитера

В качестве элементарной структуры, характеризующей пространство “планета-спутник ”, выберем прямоугольный треугольник, периметр которого равен

$$P = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha, \tag{4}$$

т. е. приведенное среднее расстояние между центрами масс ведущего и ведомого тела равно 1, а α – угол под которым виден экваториальный радиус ведомого тела на среднем расстоянии от ведущего тела.

Наряду со соизмеримостями скоростей для 3-х галилеевых спутников (Мусотто и др., 2002)

$$\omega_I - 3\omega_{II} + 2\omega_{III} = 0 \tag{5}$$

существуют устойчивые связи геометрических характеристик элементарных структур в пространстве Юпитер – галилеевы спутники.

Установленные автором связи между периметрами P, радиусами вписанных окружностей r и расстояниями между вписанными и описанными окружностями OO' имеют вид:

$$P_I + P_{III} + 3P_{IV} - 2P_I = 6 \tag{6}$$

$$r_{II} + r_{III} + 3r_{IV} - 2r_I = 0 \tag{7}$$

$$OO'^2_{II} + OO'^2_{III} + 3OO'^2_{IV} - 2OO'^2_I = \frac{3}{4}. \tag{8}$$

Абсолютные погрешности правых частей в (6)–(8) соответственно равны $4\cdot 10^{-7}$, $2\cdot 10^{-7}$ и $1\cdot 10^{-7}$.

В отличие от соизмеримостей скоростей (5), целочисленные геометрические соотношения (6)–(8) описывают пространственные связи четырех галилеевых спутников. Соотношения (6)–(8) связывают самоподобные элементы плоской геометрической структуры, отображающей локальные свойства многомерного реального пространства.

4 Элементы фрактальной геометрии: соотношение между периметром и площадью

Размерность, применительно к отдельно взятому объекту (структуре) может не совпадать с его размерностью во множестве подобных объектов.

Определим размерности протяженностей в системе Юпитер – галилеевы спутники исходя из соотношения периметра и площади (Мандельброт, 2002) в виде:

$$\rho = \frac{[P_i]^{\frac{1}{D_i}}}{[S_i]^{\frac{1}{2}}}, \tag{9}$$

где i = I, ..., IV, S_i – площадь, ограниченная соответствующим периметром P_i.

Тогда величина размерности периметра i-го спутника равна:

$$D_i = \frac{\ln P_i}{\ln(\rho\sqrt{S_i})}, i = I, ..., IV. \tag{10}$$

Для системы галилеевых спутников имеет место :

$$\rho^2 S_i = 3 + 4S_J, i = I, ..., IV. \tag{11}$$

С учетом (11) получаем

$$D_i = \frac{2\ln P_i}{\ln(3 + 4S_J)}, i = I, ..., IV. \tag{12}$$

Тройной резонанс (5) накладывает дополнительные условия на соотношение между периметром и площадью.

Для 3-х спутников (Ио, Европа, Ганимед), связанных тройным резонансом, формула (12) имеет вид:

$$D_i = \frac{2\ln(P_i - k_i P_i)}{\ln(3 + 4S_J)}, i = I, ..., III. \tag{13}$$

где k_i – безразмерные коэффициенты, вычисленные для каждого спутника на основе геометрических связей между величинами OO'_i.

В таблице 1 и 2 приведены результаты вычислений величин D_i и μ_i геометрическим методом, изложенным в данной работе. Исходные данные для вычислений содержатся в таблице 1 (столбцы 2 и 3) и таблице 2 (2-й столбец).

Таблица 1. Вычисленные размерности **D**

Планета, спутники	Средние радиусы орбит (км)	Экваториальные радиусы (км)	$\mathbf{k_i}$	$\mathbf{D_i}$
Юпитер, (J)	778 547 200	71 492	–	–
Ио, (I)	422 000	1 821.1	0.001 524 800	1.262 926 939
Европа, (II)	671 000	1 565	0.000 570 121	1.262 870 204
Ганимед, (III)	1 070 400	2 634	0.000 558 674	1.263 007 523
Каллисто, (IV)	1 883 000	2 408	–	1.262 952 041

Таблица 2. Вычисленные отношения масс μ

Спутник	$\mu^* \cdot 10^{+5}$ (динам. метод)	$\mu \cdot 10^{+5}$ (геометр. метод)	$\delta\mu = \frac{\lvert\mu^* - \mu\rvert}{\mu^*} \cdot 100\%$
Ио, (I)	4.704 06	4.707 8	0.08
Европа, (II)	2.527 95	2.527 8	0.005
Ганимед, (III)	7.804 60	7.804 1	0.006
Каллисто, (IV)	5.668 00	5.672	0.07

5 Заключение

1. Геометрический метод определения отношения масс спутник/планета обусловлен динамическими законами, определяющими краевые условия области существования ведомого тела.
2. Понятия традиционной геометрии, принятые в ней целочисленные размерности, оказываются недостаточными для описания реальных связей и структур. Так, топологическая размерность периметра плоского треугольника равна 1.

   Вычисленные размерности $\mathbf{D_i}$ приведенных периметров $\mathbf{P_i}$ удовлетворяют отношению $(\text{периметр})^{\frac{1}{\mathbf{D_i}}}/(\text{площадь})^{\frac{1}{2}}$. Более того, они совпадают с размерностью Хаусдорфа-Безиковича, так как $\mathbf{D_i} \cong \frac{\ln \mathbf{4}}{\ln \mathbf{3}}$ (Федер, 1991).
3. Переход от геометрических структур (периметров) к физическим (отношение масс) возможен в условиях фрактального характера соответствующих геометрических структур.

Литература

Мандельброт Б. // Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований. 2002. С. 656.

Мусотто и др. (Musotto S., Varadi F., Moore W.B., Schubert G.) // Numerical simulation of the orbit of the Galilean satellites. Icarus 159. 2002. P. 500.

Федер Е. // Фракталы. М.: Мир. 1991. С. 254.