

УДК 530.16

## Вероятностные модели в классической и квантовой механике

*В.Ю. Теребиж*

НИИ “Крымская астрофизическая обсерватория”, 98409, Украина, Крым, Научный  
*vterebizh@gmail.com*

Поступила в редакцию 20 июля 2009 г.

*Недавно Филип Канделас (с физического факультета Техасского университета) ждал вместе со мной лифт, и разговор зашел о молодом теоретике, подававшем надежды на старших курсах и затем исчезнувшем из вида. Я спросил Фила, что помешало бывшему студенту продолжать исследования. Фил грустно покачал головой и сказал: «Он попытался понять квантовую механику».*

Стивен Вайнберг, “Мечты об окончательной теории”, 1992

**Аннотация.** Этот подход обеспечивает непротиворечивость интерпретации ряда важных физических Явлений, в частности, взаимоотношения между неустойчивостью движения и временной необратимостью процессов, стохастического описания эволюции систем в теории детерминированного хаоса, *H*-теоремы Больцмана и парадоксов квантовой механики.

STOCHASTIC MODELS IN CLASSICAL AND QUANTUM MECHANICS, *by V. Yu. Terebizh*. This approach allows us to achieve a consistent interpretation of some important physical phenomena, in particular, the relationship between instability and irreversibility in time, the stochastic evolution of systems in the deterministic chaos theory, the *H*-theorem of Boltzmann, and paradoxes of quantum mechanics.

**Ключевые слова:** статистическая физика, квантовая механика

---

## 1 Введение

Свойственный молодости максимализм, столь ярко выраженный в эпиграфе, вряд ли сохранился бы после нескольких лет конкретной исследовательской работы. В той же книге Вайнберг замечает: «Большинство физиков использует квантовую механику в повседневной работе, не заботясь о фундаментальных проблемах ее интерпретации. <...> Но я признаю, что ощущаю некоторый дискомфорт, всю жизнь используя теорию, которую никто толком не понимает».

Еще более эмоционально передал свое отношение к ортодоксальной квантовой теории другой выдающийся физик, Ричард Фейнман (1985): «Я не могу объяснить, почему Природа ведет себя именно так, а не иначе. <...> Квантовая электродинамика дает совершенно абсурдное с точки зрения здравого смысла описание Природы. И оно полностью соответствует эксперименту. Так что

я надеюсь, что вы сможете принять Природу такой, как Она есть – абсурдной». Общеизвестна негативная позиция в этом отношении Альберта Эйнштейна и Эрвина Шрёдингера.

Что же не устраивало ученых, которым физика обязана введением понятия о фотонах, фундаментальным уравнением для волновой функции, преодолением серьезных трудностей квантовой электродинамики и созданием единой теории электрослабых взаимодействий? (Все четыре вклада отмечены Нобелевскими премиями.) Часто говорят, что Эйнштейн не принял вероятностной интерпретации реальности, которую привнесла с собой квантовая механика. Не следует, однако, забывать, что уже в своих первых работах Эйнштейн дал теорию броуновского движения, независимо построил основные конструкции статистической механики, предвосхитил важное вероятностное разложение, через много лет связанное с именами Карунена и Лозва, ввел вероятности энергетических переходов в атомах и выполнил ряд других исследований, ясно показывающих, что он тонко понимал вероятностные проблемы и владел соответствующей техникой. Дело, конечно, в ином – в самом понимании взаимоотношения исследователя с Природой, выраженном в известном афоризме Эйнштейна: «Я не верю, что бог играет в кости».

Естественно полагать, что задача науки состоит в построении наиболее простой *модели* изучаемого круга явлений, адекватной данным эксперимента и обладающей предсказательной силой. Раньше вместо слова *модель* обычно говорили *теория*; первый из этих терминов лучше отражает неполный, преходящий характер нашего понимания Природы. Почему же вероятностные модели классической физики были приняты физическим сообществом<sup>1</sup>, тогда как общепринятой трактовки квантовой механики нет до сих пор? И это при том, что анализу вероятностных основ физики и соответствующей интерпретации квантовой теории посвящена обширная литература, включающая глубокий анализ реальных и мысленных экспериментов (см., в частности, Бор, 1935; Фок, 1957; Борн, 1963; Вигнер, 1960; Чириков, 1978; Кравцов, 1989; Алимов и Кравцов, 1992; Мандельштам, 1950).

Подход, предлагаемый квантовой механикой, станет отчетливее, если сначала проследить возникновение вероятностных моделей в классической физике. Ясные указания такого рода дает уже рассмотрение простого опыта с игральной костью. Задача этого очерка – по возможности облегчить ознакомление с вероятностными проблемами физики, чтобы избежать ситуаций, подобных описываемой Стивеном Вайнбергом. Мы последовательно обосновываем точку зрения, согласно которой в Природе, как таковой, нет места вероятностям; исследователь вынужден вводить вероятностные понятия и соответствующие модели в условиях, обеспечивающих лишь частичную предсказуемость изучаемых явлений как в классической, так и в квантовой механике. Свет дифрагировал на отверстиях, атомы сохраняли стабильность, а игральные кости и системы, состоящие из большого количества молекул, демонстрировали определенные закономерности задолго до того, как Христиан Гюйгенс, Блез Паскаль, Пьер Ферма и Якоб Бернулли заложили основы теории вероятностей.

Для связности изложения нам пришлось бегло коснуться некоторых фактов, хорошо освещенных в учебниках. Из теории вероятностей для понимания дальнейшего достаточно знать, что дискретная случайная величина  $\xi$  задается совокупностью  $x_1, x_2, \dots, x_N$  значений, которые она может принимать в опыте, и соответствующими вероятностями реализации этих значений  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Количество значений  $N$  может быть неограниченно велико, вероятности должны быть неотрицательными и в сумме давать единицу. Очень полезно не путать обозначения самой случайной величины и ее возможных значений. В прикладных исследованиях такое смешение часто приводит к недоразумениям; специалисты по теории вероятностей иногда идут на это при нехватке символов.

## 2 Бросание игральной кости и другие неустойчивые процессы

Рассмотрим еще раз старую задачу о бросаниях игральной кости, акцентируя внимание на физической стороне дела. Предположим, что такие бросания производятся в следующих условиях: 1) кость имеет форму кубика, ребра и углы которого одинаковы с микроскопической точностью;

<sup>1</sup> Впрочем, не всегда безоговорочно – достаточно вспомнить многолетнюю дискуссию, касающуюся  $H$ -теоремы Больцмана.

2) надписи 1, 2, ..., 6, отличающие грани одну от другой, сделаны так, что их масса на несколько порядков величины меньше массы кости; 3) кость и стол, на который она падает, изготовлены из достаточно упругого материала; 4) исходная ориентация кости всегда одинакова: скажем, вверх располагается грань "6", а грань "4" ориентирована на север<sup>2</sup>; 5) кость освобождается от фиксации некоторым деликатным способом, который сейчас не конкретизируется; 6) в качестве результата единичного бросания принимается число, написанное на верхней грани остановившейся кости. Задача состоит в предсказании результата единичного бросания кости. Мы не входим в дальнейшие детали эксперимента – сказанного достаточно для уяснения сути проблемы.

Пусть сначала исходная высота  $h$  кости над столом не превышает длины ребра кубика  $a$ . Понятно, что при столь малой высоте в серии бросаний будут превалировать шестерки; грани, изначально бывшие боковыми, выпадают редко, а до выпадения "1" придется провести очень много бросаний. В этих условиях теория (модель), позволяющая успешно предсказывать результаты опыта, не нуждается в привлечении понятий раздела математики, называемого *теорией вероятностей*. Мы можем просто считать единственным возможным результатом "6", выпадение одной из боковых граней рассматривать как следствие неаккуратного соблюдения условий опыта, а получение "1" – как исключительное событие, требующее дополнительного исследования.

При значениях  $h/a \simeq 1-2$  результаты опытов станут разнообразнее. Для их интерпретации можно привлечь изощренные средства регистрации исходного положения кости, а затем рассчитать ее движение на суперкомпьютере с использованием соответствующих уравнений аэродинамики и теории упругости. Очевидно, таким путем удастся достичь настолько хорошей точности предсказаний, что динамическая модель процесса будет считаться приемлемой.

Однако уже здесь оказывается полезной и гораздо более простая – вероятностная – модель. Она не требует высокой точности информации о начальном положении кости и трудоемких расчетов. Эта модель постулирует, что написанное на верхней грани число есть случайная величина  $\xi$ , принимающая одно из значений 1, 2, ..., 6 с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_6$ . Анализ результатов серии бросаний кости с фиксированной исходной высоты показывает, что для успешного предсказания последующих результатов нужно приписать наибольшую вероятность,  $p_6$ , верхней грани, несколько меньшие,  $p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ , четырем боковым граням и минимальную,  $p_1$ , – нижней грани. Конечно, все введенные вероятности зависят от исходной высоты кости. По мере увеличения отношения  $h/a$  динамическая модель все чаще ошибается, тогда как вероятностная модель – при должной коррекции распределения вероятностей  $\{p_k(h)\}_{k=1}^6$  – сохраняет эффективность. В частности, если при  $h/a \gg 1$  наблюдаемые частоты выпадения граней не отличаются от 1/6 в пределах границ, предписываемых математической статистикой<sup>3</sup>, у нас нет оснований подозревать асимметричность кости. В противном случае обе модели требуют скрупулезного изучения степени однородности материала кости и условий эксперимента.

Почему же при значительной высоте начального положения кости мы вынуждены отказаться от детерминистической модели? Дело в том, что по мере возрастания  $h/a$  все более важную роль играют неучтенные нами факторы: небольшой разброс начальных положений кости, неидентичность действия механизма освобождения кости, влияние окружающей среды и пр. В тех случаях, когда результат опыта существенно изменяется при малых вариациях начальных условий и обстоятельств протекания процесса, последний называют *неустойчивым*. В классической механике неустойчивость долго не считалась принципиальной трудностью: казалось, что проблема состоит лишь в большом объеме требуемой информации о начальном состоянии системы. Современные исследования показали, что развитие неустойчивости во времени часто носит экспоненциальный характер, так что чрезвычайно малые отклонения быстро достигают значительной величины (см., например, Лихтенберг и Либерман, 1983; Заславский, 1984, 1999; Шустер, 1984). Поскольку некоторая неопределенность начальных и граничных условий неизбежна уже ввиду атомарной структуры

<sup>2</sup> Предполагается, что нумерация кости выполнена стандартным образом, так что суммы цифр на противоположных гранях равны 7.

<sup>3</sup> Эта дисциплина выясняет результаты воображаемых, а потому совершенно "чистых", опытов для выборок сколь угодно большого объема.

вещества, многие процессы окружающего нас мира принципиально неустойчивы (более подробно эти вопросы обсуждаются в следующем параграфе).

Применимость вероятностных моделей для описания процессов, сходных с процессом бросания игральной кости, не вызывала особых разногласий. Если отвлечься от стохастичности квантового поведения, о которой мы будем говорить ниже, то можно было полагать, что по мере уточнения (по крайней мере – мысленного) всех деталей процесса его результат становится все более определенным. Примером может служить брауновское движение в жидкости частиц размерами порядка 1 мкм. Привлекая для описания движения отдельной частицы простейшую модель случайного блуждания, мы извлекаем полезные выводы вероятностного характера о поведении ансамбля многих таких частиц. Вместе с тем анализ длительных наблюдений какой-либо одной частицы с использованием рафинированной теории движения малых частиц в жидкости позволяет учесть инерцию частицы и эффекты вязкости среды, а потому с большей определенностью предсказать ее поведение по сравнению с прогнозом, который дает модель чисто случайного блуждания (Чандрасекар, 1943).

Хорошим примером в этом отношении можно считать стохастические модели движения транспорта в больших городах. Всякий автомобилист, несомненно, отвергнет предположение о том, что его поездки в пятницу имеют случайный характер: сначала он поехал на работу, затем посетил несколько заранее обусловленных магазинов и наконец, захватив семью, отправился на загородную дачу. В принципе, городские власти могли бы предварительно собрать сведения о планах каждого владельца автомобиля, но такая детальность картины в масштабах города вовсе не требуется – достаточно ввести стохастическую модель движения транспорта по основным магистралям, корректируя параметры соответствующего вероятностного распределения в зависимости от времени суток.

### 3 Статистическая механика

#### 3.1 Неустойчивость движения и необратимость

Необратимость эволюции больших ансамблей частиц обычно иллюстрируют примером совокупности молекул двух типов (условно – “белых” и “синих”), заполняющих замкнутый сосуд. Первоначально белые и синие молекулы разделены перегородкой. Опыт показывает, что после устранения перегородки оба типа постепенно перемешиваются между собой, так что по прошествии времени релаксации содержимое сосуда выглядит “голубым”. Почему никогда не наблюдали обратного процесса, когда исходно голубая смесь разделяется со временем и в одной части сосуда оказываются белые молекулы, а в другой – синие?

Для получения убедительного ответа на этот вопрос обратимся сначала к предельно простому мысленному эксперименту. Предположим, что в замкнутом ящике, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда, двигаются небольшие одинаковые шарики. В начальный момент времени все шарики касаются одной из стенок, их скорости направлены строго перпендикулярно этой стенке, минимальное расстояние между центрами шариков превосходит их диаметр. Начальные скорости не обязаны быть одинаковыми; интересно выбрать их разными в соответствии с некоторым законом. Поверхности стенок, как и поверхности шариков, считаются идеально гладкими, удары – абсолютно упругими, взаимное притяжение отсутствует. Классическая механика без труда предсказывает поведение этой системы для сколь угодно большого интервала времени: каждый из шариков независимо от других “болтается” вдоль отрезка прямой линии, перпендикулярной двум стенкам. Если начальные скорости были выбраны не специальным образом (все такие способы нетрудно указать заранее), то с течением времени совокупность шариков более или менее равномерно рассеется между двумя стенками ящика. Вместе с тем, если в произвольный момент времени обратить все скорости, то совокупность шариков вернется строго к ее изначальному состоянию. Сходным образом бегуны на длинную дистанцию, уже перемешавшись после многих кругов на стадионе, одновременно вернуться к линии старта, если по сигналу судей повернут обратно и каждый сохранит величину своей скорости.

Усложним лишь чуть-чуть условия опыта: предположим, что в месте соударения одного из шариков на стенке ящика есть небольшая асимметричная выпуклость. При первом же ударе о стенку рассматриваемый шарик отразится слегка вбок и спустя некоторое конечное время ударится об одну из боковых стенок. В общем случае дальнейшая траектория шарика весьма сложна; отвлекаясь от специально подобранных начальных условий, можно утверждать, что по прошествии некоторого времени шарики начнут сталкиваться не только со стенками ящика, но и между собой. Тем не менее классическая механика настаивает на возможности сколь угодно точно предсказать состояние системы через произвольно большой промежуток времени; для этого, правда, начальные положения и скорости шариков требуется знать с бесконечно высокой точностью (Крылов, 1950; Синай, 1970). Развитое состояние моделей такого рода называют *детерминированным хаосом* (Шустер, 1984). Детерминированность обусловлена полным отсутствием случайных факторов (шума), так что эволюция описывается системой дифференциальных или разностных уравнений, а ссылка на хаос – чрезвычайной запутанностью траекторий даже в случае систем лишь с несколькими степенями свободы. Подчеркнем: здесь отсутствует *хаос* в истинном значении этого слова, которое подразумевает доминирующую случайность поведения.

Нужно иметь в виду, что в некоторых макроскопических системах могут быть реализованы состояния, которые уместно называть *иллюзорным хаосом*. Такие системы обладают весьма длительной “памятью” о своих прошлых состояниях. Приведем пример реального эксперимента согласно Бруэру и Хану (1984): «В кольцеобразный промежуток между двумя цилиндрами из прозрачной пластмассы наливают вязкую жидкость. Наружный цилиндр неподвижен, а внутренний может вращаться вокруг своей оси. В жидкость впрыскивают узкую струйку красителя; это состояние отвечает первоначальной упорядоченности частиц. Если поворачивать внутренний цилиндр, то после нескольких оборотов краситель смешается с жидкостью. Покажите жидкость, находящуюся между цилиндрами, знатоку термодинамики, и он скажет, что молекулы красителя полностью разупорядочены... Но при обращении направления вращения внутреннего цилиндра процесс смешивания обращается; после равного числа оборотов в обратном направлении снова возникает узкая вертикальная полоска окрашенной жидкости». Цитируемая статья включает в себя впечатляющие фотографии. Очевидно, здесь реализуется ситуация, аналогичная приведенному выше примеру с бегунами.

Явление *ядерного спинового эха*, обнаруженное Ханом в 1950 г., также демонстрирует возможность долгоживущей памяти в системах с устойчивым характером движения, но теперь – в атомном масштабе: «В магнитное поле помещали образец глицерина и подвергали его действию двух коротких импульсов электромагнитного радиочастотного излучения, разделенных интервалом  $t$  в несколько сотых долей секунды. Образец как бы помнил об этой последовательности импульсов, и спустя время  $2t$  после первого из них испускал третий импульс – *эхо*» (Бруэр и Хан, 1984). Объяснение опыта заключается в следующем. Глицерин сначала подготавливают, ориентируя спины системы протонов параллельно внешнему магнитному полю. Первый импульс инициирует сложную прецессию спинов протонов, второй – поворачивает спины на  $180^\circ$ , так что спустя время  $t$  после него все спины снова оказываются одинаково ориентированными. В этот момент атомы испускают эхо-импульс излучения.

Эволюцию системы в двух последних опытах можно назвать *регулярной, устойчивой*, ибо малые изменения начальных или внешних условий не приводят к существенному изменению ее состояния через большой промежуток времени. Между тем уже ранние работы Анри Пуанкаре (1892) и Жака Адамара (1898), а в наше время – многие исследования, последовавшие за статьей метеоролога Эдварда Лоренца (1963), показали, что «... устойчивое регулярное движение в классической механике – исключение, в противоположность утверждениям многих публикаций» (Шустер, 1984). Как правило, даже строго классические системы с небольшим числом степеней свободы при отсутствии шума обнаруживают *неустойчивость* движения (в общем случае – поведения): ничтожно малые вариации начальных условий приводят к радикальному различию конечных картин. В отличие от регулярной эволюции, где расходимость фазовых элементов со временем не выше линейной, в неустойчивых системах расходимость чрезвычайно быстра – она носит экспоненциальный характер. Любая конечная точность задания начальных условий гарантирует возможность лишь недолго

проследить за эволюцией неустойчивой системы, дальнейшее ее поведение неотличимо от эволюции системы с другим начальным состоянием. Вопросы о том, каково время релаксации, установится ли стационарное в среднем распределение плотности, будет ли это распределение равномерным или останутся области избегания, а также и многие другие проблемы, касающиеся детерминированного хаоса, получили лишь частичное решение.

*Мы вынуждены заключить, что в распоряжении классической механики нет средств, позволяющих в течение длительного времени следить за эволюцией даже идеальной системы с малым количеством степеней свободы, если она неустойчива.* Это тем более справедливо в отношении реальных систем. Так, в рассматриваемом нами эксперименте следовало бы учитывать не только чрезвычайно сложный характер шероховатости стенок и поверхностей шариков, но и – поскольку составляющие их атомы движутся – непостоянство этих характеристик со временем, неупругость ударов и многие другие явления. Лишь недавно оценили роль еще одного фактора, эффективно влияющего на поведение классического газа в замкнутом сосуде – взаимодействие молекул с полем излучения. Еще можно себе представить, как изолировать газ от теплового излучения стенок сосуда, однако столкновения молекул друг с другом даже при умеренной температуре неизбежно сопровождаются низкочастотным электромагнитным излучением. Герценштейн и Кравцов (2000) показали, что этот механизм приводит к существенному отклонению траектории молекулы от результатов чисто ньютоновских расчетов за удивительно короткое время, лишь в несколько раз превосходящее средний интервал свободного пролета молекул. С помощью классической механики можно установить лишь некоторые общие черты эволюции системы многих частиц, а для создания сколь-нибудь реальной картины следует привлечь иные модели.

Два фактора, *рассматриваемых совместно*, – характер начального состояния и неустойчивость эволюции – позволяют ответить на вопрос, почему в окружающем нас мире мы видим так много необратимых процессов, скажем, разбивающиеся о берег морские волны не восстанавливают свою форму и не уходят вспять. *Многие системы были сначала подготовлены – упорядочены – Природой или человеком, а затем в дело вмешалась неустойчивость эволюции.* Та же грубо упорядоченная череда морских волн порождается естественным путем – сильным ветром, между тем как восстановление правильной системы волн требует огромной *целенаправленной* работы. Ричард Фейнман (1965а) полагает, что к известным физическим законам необходимо добавить гипотезу о том, что в прошлом Вселенная была более упорядоченной.

Теперь мы готовы вернуться к опыту с двумя типами молекул в замкнутом сосуде. Ясно, что в условиях, хотя бы отчасти приближающихся к реальным, движение произвольно выбранной молекулы будет неустойчивым. Так, если мы запустим несколько копий процесса перемешивания из одного и того же – *в пределах теоретических возможностей эксперимента* – начального состояния и при возможно более скрупулезном сохранении внешних условий, то спустя конечное время в разных реализациях процесса отмеченная молекула окажется в совершенно различных областях сосуда.

Пока при обсуждении мысленных экспериментов, касающихся поведения систем многих частиц, мы ни слова не сказали о вероятностях. Необходимость их введения обусловлена неустойчивым характером эволюции типичных систем; по этой причине реальные процессы эволюционируют непредсказуемым для исследователя образом. (Эйнштейн: «Бога не заботят наши математические трудности. Он интегрирует эмпирически».) В этих условиях, несравненно более сложных, чем в опыте с бросанием кости, исследователь вынужден привлечь ту или иную вероятностную модель, задавая подходящий стохастический механизм. *Только после этого, и только в рамках принятой модели* мы вправе говорить о том, что с той или иной вероятностью первоначально разделенное состояние в конце концов окажется равномерно окрашенным, а последнее лишь с малой вероятностью может вернуться к исходному состоянию. Даже в модели идеального газа обращение скоростей всех молекул не вернет систему к разделенному состоянию, ибо этого не позволит сделать сколь угодно слабая стохастичность, допускаемая исследователем. Тем более это справедливо для моделей, представляющих реальные системы с явно выраженной неустойчивостью движения.

В качестве примера удачной вероятностной модели упомянем «модель пса и блохи», предложенную в 1907 г. Полем и Татьяной Эренфестами (см. Кац, 1957). Модель иллюстрирует переход к

статистическому равновесию газа, неравномерно заполняющего замкнутый объем. Сначала  $2N$  пронумерованных шаров некоторым заданным образом распределяются по двум ящикам. Затем датчик случайных целых чисел выбирает номер, *равномерно* распределенный на сетке  $1, 2, \dots, 2N$ ; шар с этим номером перекладывают из ящика, где он лежит, в другой. Процедура многократно повторяется. Эта простая модель допускает исчерпывающее аналитическое исследование; сейчас нетрудно выполнить и ряд соответствующих компьютерных реализаций процесса. В частности, любопытно проследить его эволюцию из состояния, когда все шары находились в одном ящике. Мы намеренно подчеркнули выше равномерность распределения случайного номера шара: вообще говоря, можно задать и какое-либо иное дискретное распределение вероятностей. При этом будет введена новая вероятностная модель процесса, быть может, лучше описывающая реальное поведение конкретного образца газа. Очевидно, при  $N \gg 1$  в рамках принятой вероятностной модели система, достигшая статистического равновесия, лишь с весьма малой вероятностью вернется в исходное состояние.

Примеры, подобные рассмотренным выше, нетрудно продолжить, последовательно переходя от простых ситуаций к более запутанным, от идей Больцмана к ансамблям Гиббса (см., в частности, лекции Уленбека и Форда [1963]). Анализ убедительно свидетельствует о том, что детерминистическая модель, предлагаемая классической механикой, оказывается непродуктивной при изучении систем с неустойчивым поведением. Основная задача статистической физики заключается в построении адекватных вероятностных моделей таких явлений. Об этом говорит и само название этой области физики<sup>4</sup>.

### 3.2 $H$ -теорема Больцмана

Наиболее известный случай, когда в классической физике продолжалась длительная дискуссия, порожденная вероятностной трактовкой явления, связан с  $H$ -теоремой. В 1872 г. Людвиг Больцман пришел к заключению, что некоторая функция времени  $H(t)$ , характеризующая состояние разреженного газа, либо убывает со временем, либо сохраняет свое значение<sup>5</sup>. В таком виде  $H$ -теорема противоречит симметрии законов механики относительно обращения времени, а также доказанной Анри Пуанкаре теореме, согласно которой замкнутая механическая система по прошествии достаточно большого промежутка времени возвращается в сколь угодно малую окрестность почти любого начального состояния. Эти противоречия, получившие названия парадоксов Лошмидта и Цермело, заставили Больцмана обратиться к вероятностной трактовке процесса установления равновесия: изменение  $H(t)$  описывает только *наиболее вероятную* эволюцию системы. Современная формулировка (Хуанг, 1963)  $H$ -теоремы включает в себя и важное уточнение начального состояния: «Если в данный момент времени состояние газа удовлетворяет предположению о молекулярном хаосе, то в сколь угодно близкий последующий момент времени с подавляюще высокой вероятностью выполняется неравенство  $dH/dt \leq 0$ ».

Сказанное в предыдущем пункте ясно показывает, что  $H$ -теорема говорит не о поведении совокупности реальных частиц, а только о некоторой *вероятностной модели*, призванной удовлетворительно описать процесс приближения изучаемой системы к равновесию. Физическим механизмом, обуславливающим разрушение порядка, является неустойчивость движения, тогда как закон возрастания энтропии – только *наша констатация этого объективного явления*. Энтропия – одно из полезных модельных понятий, но отнюдь не объективное свойство Природы. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что величина энтропии зависит от принятой дискретизации фазового

<sup>4</sup> Заметим, впрочем, что в литературе закрепилось неправомерное употребление слова «статистический» вместо «вероятностный» или «стохастический». Последние термины указывают на присутствие в модели случайных факторов и должны противопоставляться термину «детерминистический». Математическая же статистика занимается задачей, *обратной* по отношению к основному кругу задач теории вероятностей, а именно – восстановлением информации о вероятностных законах по заданной случайной реализации. Поэтому нельзя говорить: «поведение системы имеет статистический характер».

<sup>5</sup> Для разреженного газа  $H(t)$  совпадает с энтропией, взятой с обратным знаком, так что  $H$ -теорема может рассматриваться как частный случай закона возрастания энтропии в замкнутой системе.

$\mu$ -пространства на ячейки: при уменьшении размеров ячеек величина энтропии уменьшается (см., например, Паули, 1954).

До тех пор, пока говорят о поведении классического газа, аргументы Лошмидта и Цермело сохраняют силу. Напротив, вводимый в модели “газ” не обязан подчиняться *всем* законам классической механики. Хорошая модель, разработанная для конкретной ситуации, имеет право не учитывать в полной мере классическую обратимость во времени и тем самым не подчиняться возвратной теореме Пуанкаре (тем более, что соответствующий цикл непомерно длителен!). Так, *H*-теорема Больцмана привлекает конкретную модель разреженного газа, которая удовлетворительно описывает его эволюцию из *гипотетического* состояния молекулярного хаоса, реализующегося на практике лишь с той или иной степенью точности. Именно «это статистическое допущение [о молекулярном хаосе] вносит в уравнения необратимость во времени» (Уленбек и Форд, 1963, с. 191). Современные модели статистической физики, в частности известный подход Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона, вводят аналогичные предположения вероятностного характера, но на более глубоком уровне по сравнению с теорией Больцмана.

Понятно, что будучи вынужденными обратиться к какой-либо вероятностной модели, мы уже не можем претендовать на детальное описание процесса, которое надеялись получить в рамках классической динамики.

### 3.3 Стрела времени

К этому же кругу проблем часто относят широко обсуждавшийся вопрос о различии между прошлым и будущим. Ввиду сказанного представляется очевидным, что неправомерно обуславливать направленность времени (“*стрелу времени*”, по выражению Артура Эддингтона) поведением больших совокупностей частиц, описываемых статистической механикой. (Типичную аргументацию при таком подходе можно найти в статье Либовица [1993].) Напротив, именно ход времени позволяет наблюдать последовательные состояния неустойчивой системы и описывать ее эволюцию с помощью вероятностных моделей. Как заметил Св. Августин [398], «Пусть же не говорят мне: время – это движения небесных тел. Когда, по молитве, солнце было остановлено, чтобы человек мог одержать победу, то солнце стояло, но время шло» (перевод с лат. согласно А.А. Фридману, 1923).

Выяснение природы времени и, в частности, его направленности – гораздо более глубокая задача, стоящая перед физикой.

## 4 Характерные черты классических вероятностных моделей

Суммируем выводы, следующие из анализа вероятностных моделей классической физики, чтобы затем проследить соответствующие изменения в квантовой теории<sup>6</sup>.

Хорошо известно, что всякую модель изучаемого явления нельзя полагать ни единственной, ни исчерпывающей. Даже весьма успешная модель имеет границы, в пределах которых она предпочтительнее других моделей, но при расширении области исследований ее обычно сменяет более совершенная модель. Так, общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна сменила теорию тяготения Ньютона; последняя сохранила эффективность в случае малых скоростей и слабого гравитационного поля. Выбор одной из многих возможных моделей определяется принципом, который сформулировал Виллиам Оккам в XIV веке: *исследователь обязан предпочесть наиболее простую модель из ряда альтернатив, дающих объяснение результатам опыта*.

Очевидно, простоту модели следует понимать в сравнительном контексте. Суть дела прекрасно передает еще один афоризм Эйнштейна: «Все нужно делать просто, насколько это возможно, но не проще». Нередко и в рамках простейших из возможных моделей приходится использовать изощренные построения. Скажем, при изучении распределения людей по росту применяется аппроксимация гистограммы функцией Гаусса, которая содержит, казалось бы, не относящуюся к делу константу

<sup>6</sup> Автор надеется, что его не упрекнут в увлечении «игрой словами, специально для того выдуманными».



$\pi$  (см. известное эссе Вигнера, 1960). Современные физические модели строения вещества привлекают несравненно более сложные средства; как правило, в них используются абстрактные математические конструкции. Технически ОТО гораздо сложнее теории Ньютона, но первая привлекает меньше априорных предположений, что и оправдывает ее сравнительную простоту.

Если модель проста и продуктивна, и особенно, когда она работает в течение десятилетий или даже столетий (как сейчас принято говорить, стала *парадигмой*), люди начинают приписывать самой Природе понятия, которыми оперируют их теории. Так, в свое время широкую дискуссию вызвал *гравитационный парадокс* – расходимость ньютоновского потенциала тяготения в неограниченной однородной Вселенной. Полагали, что расходимость потенциала отвергает бесконечную модель. Как обычно, парадокс только подчеркнул условность выбранного нами средства; если говорить о *силе* тяготения в произвольной точке неограниченной и в среднем однородной модели Вселенной, то она конечна и подчиняется вероятностному распределению Хольцмарка. Точнее, если пространственное распределение звезд описывается моделью Пуассона, то вероятность значения силы, большего заданной величины  $F$ , быстро стремится к нулю по мере возрастания  $F$  (см. Чандрасекар, 1943).

Столь же условны и другие понятия, ставшие привычными в рабочих моделях явлений, например, энтропия. Субъективность всякой модели стоит лишней раз отметить, поскольку это положение играет важную роль в картине мира, к которой приводит квантовая механика (см. раздел 9).

Как ни странно, многие дискуссии были вызваны смешением понятий “случайность” и “непредсказуемость”. Если вы не знаете расписания автобуса, то его прибытие непредсказуемо для вас, но вы вольны либо выбрать некоторую вероятностную модель ожидания, либо позвонить диспетчеру. Тот факт, что мы неспособны предсказать положение брауновской частицы, не может служить основанием для того, чтобы считать ее движение объективно случайным; такова только выбранная нами экономная модель.

Приведенное выше обсуждение процедуры бросания игральной кости, моделей брауновского движения мелких частиц, движения транспорта в большом городе и типичных моделей статистической механики ясно иллюстрирует точку зрения классической физики на принципиальный вопрос о том, каким образом в теории появляются вероятности:

*В самой Природе нет места вероятностям. Исследователь вынужден привлекать вероятностные модели при описании неустойчивых процессов, а именно – когда начальные данные и внешние условия проведения опыта известны лишь приближенно, между тем как его результаты столь существенно зависят от этих обстоятельств, что становятся отчасти непредсказуемыми.* (А)

Может быть, нечто подобное имел в виду Эйнштейн в афоризме о боге, играющем в кости: *казалось, что, в отличие от классической физики, квантовая механика предписывает вероятностное поведение самим объектам исследования.* Побудительные мотивы для столь радикального утверждения можно понять, рассмотрев опыт с прохождением света через две щели, однако мы отложим это обсуждение до раздела 6. В следующем разделе рассматривается промежуточная ситуация, когда квантовое поведение очевидным образом не противоречит выводу А.

## 5 Прохождение поляризованного света через кристалл турмалина

На рубеже XIX и XX столетий выяснилось фундаментальное свойство процесса регистрации света – его *дискретность*. Если яркость источника света постепенно уменьшать, то регистрируемая картина становится все более “зернистой”. Источник света нетрудно сделать настолько слабым, что регистрируются отдельные вспышки – фотособытия, – разделенные длительными интервалами времени, скажем, более часа. Существенно, что при использовании монохроматического света регистрируется каждый раз одна и та же порция энергии. Это явление можно объяснить, привлекая гипотезу, высказанную Эйнштейном в 1905 году: свет состоит из локализованных в пространстве квантов – *фотонов*, обладающих энергией и импульсом. Дополнительные свидетельства в пользу дискретной модели света Эйнштейн получил спустя 4 года, когда аналитическим путем нашел выражение, описывающее флуктуации энергии излучения в замкнутом объеме.

Приведенные выше пояснения понадобились в связи с описанием опыта по прохождению поляризованного света через кристалл турмалина, данным Полем Дираком (1958):

«Известно из опыта, что если линейно поляризованный свет использовать для вырывания фотоэлектронов, то вылетающие электроны будут иметь преимущественное направление. Таким образом, свойства поляризации света тесно связаны с его корпускулярными свойствами, и отдельному фотону можно приписать определенную поляризацию. <...>

Пусть имеется пучок света, проходящий через кристалл турмалина, который обладает способностью пропускать только свет, поляризованный в направлении, перпендикулярном оптической оси кристалла. Из классической электродинамики известно, что будет происходить при той или иной поляризации падающего пучка. Если этот пучок поляризован перпендикулярно оптической оси, он полностью пройдет через кристалл; если параллельно оси, то вовсе не пройдет; если же он поляризован под углом  $\alpha$  к оси, то через кристалл пройдет часть пучка, равная  $\sin^2 \alpha$ . Как понять эти результаты, рассматривая свет как пучок фотонов?

Пучок света, линейно поляризованного в некотором направлении, следует рассматривать как состоящий из фотонов, каждый из которых линейно поляризован в этом направлении. <...> Трудность возникает в случае падающего пучка, поляризованного наклонно (под углом к оси). Каждый из падающих фотонов при этом поляризован наклонно, и неясно, что произойдет с таким фотоном, когда он достигнет турмалина.

Вопрос о том, что произойдет с отдельным фотоном в определенных условиях, на самом деле не является точно поставленным. Для того чтобы поставить его точнее, необходимо представить себе, что производится некоторый опыт, имеющий отношение к данному предмету, и задать вопрос, каков должен быть результат опыта. Только вопрос о результатах опытов имеет действительное значение, и лишь такие вопросы должна рассматривать теоретическая физика.

В нашем примере, очевидно, следует рассмотреть опыт, в котором падающий на кристалл с одной стороны пучок состоит лишь из одного фотона, и наблюдать, что произойдет на другой стороне кристалла. Согласно квантовой механике, результат этого опыта будет тот, что иногда на обратной стороне будет обнаружен целый фотон с энергией, равной энергии падающего фотона, иногда же не будет обнаружено ничего. Если будет обнаружен целый фотон, он будет поляризован перпендикулярно оптической оси. Никогда на обратной стороне кристалла не будет обнаружена дробная часть фотона. Если повторить опыт большое число раз, то количество случаев, в которых фотон будет обнаружен на обратной стороне, составит долю  $\sin^2 \alpha$  от общего числа опытов. Таким образом, мы можем сказать, что фотон с вероятностью  $\sin^2 \alpha$  может пройти через турмалин и появиться на обратной стороне кристалла, будучи поляризованным перпендикулярно оси, и с вероятностью  $\cos^2 \alpha$  может поглотиться. Эти значения для вероятностей приводят к правильным классическим результатам для падающего пучка, содержащего большое число фотонов.

Таким путем мы сохраняем индивидуальность фотона во всех случаях. Мы можем сделать это, однако, лишь потому, что мы отказались от детерминизма классической теории. Результат опыта не определен однозначно условиями, находящимися во власти экспериментатора, как должно было бы быть с точки зрения классических представлений. Самое большое, что может быть предсказано, это совокупность возможных результатов и вероятность появления каждого из них».

В этих словах предельно ясно описан процесс создания вероятностной модели явления. Как и в случае макроскопических объектов, в рассмотренном эксперименте необходимость вероятностной модели обусловлена тем фактом, что «результат опыта не определен однозначно условиями, находящимися во власти экспериментатора». Однако имеется и принципиальное различие ситуаций. Если в классической физике еще можно надеяться на уточнение условий, в которых проводится опыт, то в микромире экспериментатор столь существенно влияет на изучаемый процесс, что обращение к вероятностной модели становится неизбежным. Наступив на муравейник, не стоит удивляться чрезмерной суетливости его обитателей.

Тем не менее, если бы только в этом состояла особенность квантовых явлений, то остались бы непонятными трудности с восприятием квантовой механики, о которых упоминалось во Введении. Проблема заключается не в неприятии вероятностного описания результатов измерений; дело в том, что *вероятностная модель, предлагаемая квантовой механикой, рассматривается не как*

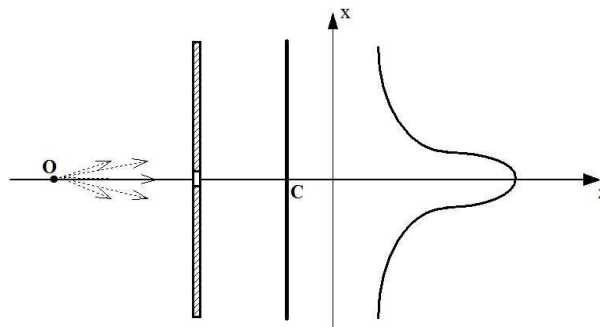


Рис. 1. Регистрация света при одной щели в экране

приближенное описание некоторой более глубокой картины явлений микромира, но дается как фундаментальная теория. Ситуацию часто характеризуют, утверждая, что в квантовой теории отсутствуют “скрытые параметры”, которые могли бы дать более полное описание (см. Фаддеев и Якубовский, 1980, с. 37–38). Столь странная модель возникла в ходе мучительных попыток дать объяснение специфическим чертам квантового поведения, и прежде всего – *нелокальности квантового взаимодействия*. Эти черты не раз иллюстрировали с помощью мысленных и реальных опытов по интерференции света, к описанию которым мы сейчас и обратимся. Для последующего сравнения с квантовой процедурой мы кратко повторим элементарный вывод выражения для интенсивности света в интерференционной картине.

## 6 Интерференция света согласно классической волновой теории

Предположим сначала (рис. 1), что в непрозрачном экране имеется только одна узкая щель, на которую падает свет от яркого источника  $O$ ; прошедшее сквозь щель излучение регистрируется приемником, расположенным по другую сторону от экрана. Если свет яркий, а разрешение приемника невелико, то регистрируется непрерывное распределение потока с одним максимумом в точке  $C$ , лежащей на осевой линии.

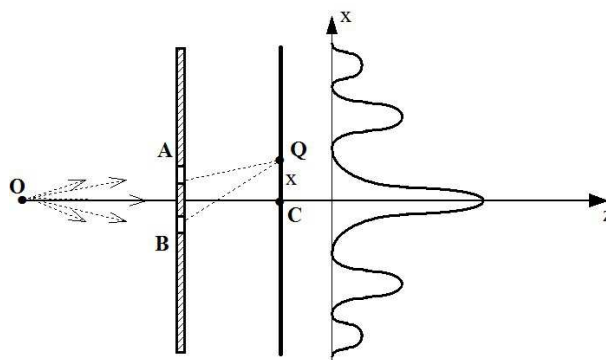


Рис. 2. Интерференция света при двух щелях в экране

Опыт с одной узкой щелью не накладывает сколь-нибудь серьезных ограничений на модель, привлекаемую для его интерпретации. Напротив, выполненный в 1801 году опыт Юнга с двумя узкими

щелями (рис. 2), потребовал существенной конкретизации модели, а именно – *волновой теории света*, включающей в себя понятие *интерференции волн*. Нужно было объяснить своеобразное распределение светового потока на приемнике, которое характеризуется рядом максимумов, постепенно убывающих по мере удаления от осевой линии. С этим блестяще справилась классическая волновая теория света, предложенная Томасом Юнгом, Христианом Гюйгенсом и Огюстеном Френелем.

Согласно волновой модели в том ее виде, которого она достигла к концу XIX века, свет представляет собой совокупность гармонических колебаний эфира с различными временными периодами  $T$  и пространственными длинами волн  $\lambda$ . Вне обычного вещества частота колебаний  $\nu \equiv 1/T$  связана с длиной волны соотношением  $\nu\lambda = c$ , где  $c$  – скорость распространения света. В рассматриваемом на рис. 2 опыте первичная волна от источника  $O$  падает на экран и порождает в нем колебания электронов; это эквивалентно тому, что каждая из щелей служит источником *когерентных* вторичных волн. Амплитуда колебаний в какой-либо точке  $Q$  детектора определяется разностью фаз приходящих в нее волн от щелей. Реакция детектора в данной точке зависит от величины локального потока света, который пропорционален квадрату амплитуды волны.

Рассмотрим для простоты монохроматический источник света, удаленный от щелей  $A$  и  $B$  на одинаковые расстояния. Вблизи щелей источник порождает гармонические колебания  $a \sin \omega t$  с амплитудой  $a$  и угловой частотой  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$ . Пусть  $D$  – расстояние между щелями, а  $z$  – удаление детектора от экрана; нас интересует амплитуда колебаний в точке  $Q$ , находящейся на расстоянии  $x$  от оси. Если пренебречь различием степени ослабления вторичных волн по пути от экрана к детектору вследствие неравенства расстояний  $\ell_1(x)$  и  $\ell_2(x)$  точки наблюдения от щелей, то можно считать, что в  $Q$  приходят волны с одинаковой амплитудой, но с разными запаздываниями по времени:  $\ell_1/c$  и  $\ell_2/c$ . Суммарное колебание пропорционально

$$\begin{aligned} & \sin[\omega(t - \ell_1/c)] + \sin[\omega(t - \ell_2/c)] = \\ & 2 \cos[\pi(\ell_2 - \ell_1)/\lambda] \sin[\omega t - \pi(\ell_1 + \ell_2)/\lambda]. \end{aligned} \quad (1)$$

Это – гармоническое колебание с амплитудой  $2 \cos[\pi(\ell_2 - \ell_1)/\lambda]$ . Как было сказано, световой поток  $F$  на удалении  $x$  от оси пропорционален квадрату амплитуды:

$$F(x) = 4 \cos^2(\delta\phi/2) = 2[1 + \cos(\delta\phi)], \quad (2)$$

где

$$\delta\phi(x) = 2\pi(\ell_2 - \ell_1)/\lambda \quad (3)$$

есть разность фаз вторичных волн. При  $x \ll z$  можно принять  $\ell_2 - \ell_1 \simeq Dx/z$ , так что

$$F(x) \simeq 2 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{Dx}{\lambda z} \right) \right]. \quad (4)$$

Формула (4) описывает периодическое распределение потока на детекторе. Пространственный период картины, задающий линейное разрешение при изучении структуры источника света, равен

$$\Delta x = \lambda z/D, \quad (5)$$

а соответствующее угловое разрешение  $\Delta\theta \equiv \Delta x/z = \lambda/D$ .

В действительности по мере удаления от оси симметрии высота максимумов убывает, что указывает на необходимость более развитой теории. В частности, она должна принимать во внимание увеличение расстояния точки наблюдения от щелей и конечность их ширины. Учет второго из этих факторов приводит к выражению

$$F(x) \simeq 2 \operatorname{sinc}^2(bx/\lambda z) \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{Dx}{\lambda z} \right) \right], \quad (6)$$

где функция  $\operatorname{sinc}(t) \equiv \sin(\pi t)/(\pi t)$  и через  $b$  обозначена ширина каждой из щелей. Дополнительный – по сравнению с формулой (4) – множитель  $\operatorname{sinc}^2(bx/\lambda z)$  предсказывает уменьшение яркости при удалении от оси до нуля при

$$x_0 = \lambda z/b, \quad (7)$$

а поскольку предполагается  $b \ll D$ , то  $x_0 \gg \Delta x$  и разрешение картины по-прежнему задается формулой (5). Последовательный учет других особенностей эксперимента в рамках классической модели приводит к детальной интерпретации наблюдаемой картины за исключением одного существенного факта – дискретности отсчетов приемника света. Это явление мы обсудим в следующем параграфе.

Приведем пример. Пусть длина волны света  $\lambda = 0.5$  мкм, ширина щелей составляет 10 длин волн, то есть  $b = 5$  мкм, расстояние между щелями  $D = 150$  мкм и удаление приемника от экрана  $z = 1$  м. Согласно формулам (5) и (7), период интерференционной картины  $\Delta x \simeq 3.3$  мм, а характерный размер модуляции изображения вследствие конечной ширины щелей  $x_0 = 100$  мм.

Таким образом, классическая волновая теория света дает удовлетворительное описание усредненной за большой промежуток времени картины, получающейся в эксперименте Юнга. Эта теория была столь же успешна и при объяснении огромного количества других опытов.

## 7 Корпускулярно-волновой дуализм

Посмотрим теперь, как объясняют интерференцию света модели, учитывающие его квантовую природу.

Обратимся сначала к прохождению света через единственную щель (рис. 1). Как уже говорилось, по мере уменьшения яркости источника света наблюдаемое распределение фотоотсчетов в виде одногорбой кривой все в большей степени обнаруживает зернистость, обусловленную поглощением отдельных фотонов. Последние проще всего уподобить классическим частицам (микродробинкам), ибо при этом получают объяснение как дискретность отсчетов, так и общая форма их распределения на приемнике света.

В опыте Юнга с двумя щелями (рис. 2) уменьшение яркости источника света также выявляет дискретность фотоотсчетов, однако классическое представление о фотонах-микродробинках оказывается несостоятельным. В самом деле, микродробинки должны приходиться к детектору *либо через щель А, либо через щель В*, так что ожидаемое изображение представляет собой суперпозицию двух одногорбых распределений, соответственно смещенных относительно оси – по сути дела, проекций щелей *А* и *В* на экран из точки *О*. Эта картина явно отличается от наблюдаемого распределения, для которого характерны резкие колебания интенсивности. Реальное распределение образовано идентичными фотособытиями, но приход фотона в данную точку приемника существенно зависит от наличия второй щели. Если закрыть одну из щелей, то мы увидим гладкое одногорбое распределение, смещенное относительно оси, тогда как при обеих открытых щелях появляется интерференционная картина с отчетливым чередованием экстремумов. Попробуйте представить себе, каким образом в модели, оперирующей фотонами-микродробинками, открывание второй щели может *уменьшить* частоту их попадания в какое-либо место детектора!

Таким образом, создается впечатление, что распространение света подчиняется законам волновой теории, а его взаимодействие с детектором происходит так, как если бы он состоял из локализованных частиц. Эта ситуация и характеризуется обычно понятием *корпускулярно-волнового дуализма*. Яркость источника света можно сделать настолько малой, что с определенностью будут регистрироваться *независимые друг от друга* акты регистрации фотонов. При этом накопленное за большое время распределение фотособытий в точности совпадает с интерференционной картиной, которая наблюдается в случае яркого источника. Для объяснения этого факта приходится допустить, что «... каждый фотон интерферирует лишь сам с собой. Интерференции между двумя разными фотонами никогда не происходит» (Дирак, 1958).

Этот вывод подчеркивает, пожалуй, самую поразительную особенность квантового поведения – *нелокальность* фотонов. Действительно, щели могут быть разнесены очень далеко друг от друга в масштабе длины световой волны, и тем не менее сохраняются как интерференционная картина, так и дискретность отсчетов. В частности, для описанного в конце раздела 6 примера расстояние между щелями  $D$  составляло 300 длин волн. Использование лазеров позволяет еще во много раз увеличить отношение  $D/\lambda$ . Телескопы, составляющие звездные интерферометры, отстоят друг от друга на десятки и сотни метров.

Раньше других, в 1908 г., неизбежность корпускулярно-волнового дуализма при описании света осознал Альберт Эйнштейн: «То, что наши теперешние основы теории излучения должны быть отброшены, я уже пытался показать ранее. <...> Я считаю, что следующая фаза развития теоретической физики даст нам теорию света, которая будет в каком-то смысле слиянием волновой теории света с теорией истечения. <...> Нельзя считать несовместимыми обе структуры (волновую и квантовую)» (см. Эйнштейн, 1966). Напомним, что “теория истечения”, рассматривавшая свет как поток весьма необычных частиц, была предложена Исааком Ньютоном.

## 8 Поведение материальных частиц

Сколь ни трудно представить себе дифракцию одиночного фотона, но в случае света нам помогает устоявшееся представление об электромагнитных волнах, которые естественным образом могут достигать одновременно двух далеко разнесенных в пространстве щелей. Однако аналогичная дифракционная картина наблюдается, если свет заменить потоком электронов или других частиц с ненулевой массой покоя (для краткости такие частицы часто именуют “материальными”), даже целых атомов! Об этом свидетельствуют разнообразные опыты, первые из которых были выполнены в 20-е годы прошедшего столетия. В частности, наблюдается дифракция незаряженных частиц – нейтронов – на кристаллической решетке, образованной ядрами атомов твердого тела. Удовлетворительная модель этого явления предполагает дифракцию нейтронных волн на кристаллической решетке, период которой значительно превосходит длину волны нейтрона.

Согласно де Бройлю (1924 г.), со всякой частицей, масса покоя  $m_0$  которой не равна нулю, связан волновой процесс с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (8)$$

где  $h \simeq 6.626 \cdot 10^{-27}$  эрг сек – постоянная Планка,  $v$  – скорость движения частицы и  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  – зависящая от скорости релятивистская масса частицы. Например, при ускорении электрона (его масса покоя  $m_0 \simeq 9.11 \cdot 10^{-28}$  г) в электрическом поле с разностью потенциалов 1 киловольт он достигает скорости  $v \simeq 1.9 \cdot 10^9$  см/сек; в данном случае длина волны де Бройля  $\lambda \simeq 0.4 \cdot 10^{-8}$  см  $\simeq 0.4$  Å. Если направить такой пучок электронов на монокристалл никеля, для которого период кристаллической решетки составляет около 2 Å, то в распределении рассеянных электронов следует ожидать появления интерференционных экстремумов. Эта картина и наблюдалась впервые в 1927 г. Дэвиссоном и Джермером.

Итак, экспериментальные данные свидетельствуют о *волновой природе не только фотонов, но и материальных частиц*. Электрон нельзя уподобить ни микродробинке, ни волне, поэтому при рассмотрении дифракции электронов на двух щелях приходится отказаться от, казалось бы, единственно возможных альтернатив: 1) электрон проходит либо через одну щель, либо через другую; 2) он проходит через обе щели одновременно. Все дело в том, что мы неоправданно переносим в квантовый мир понятие “траектории” тела, выработанное макроскопическим опытом. Более подробно об этом говорится в следующем разделе.

Корпускулярно-волновой дуализм обсуждается уже около столетия. Превосходные пояснения в этой связи дал Э.В. Шпольский (1974) в известном курсе атомной физики: «Поскольку свойства частиц и волн не только слишком различны, но и во многих отношениях исключают друг друга, а электроны, несомненно, имеют единую природу, приходится заключить, что электроны на самом деле не являются ни тем, ни другим, так что картины волн и частиц в одних случаях подходят, а в других оказываются непригодными. Свойства микрочастиц настолько своеобразны, поведение их в такой степени не похоже на поведение окружающих нас в обыденной жизни макроскопических тел, что у нас нет для них подходящих образов. Однако ясно, что, поскольку мы вынуждены для описания *одних и тех же объектов* пользоваться и волновой, и корпускулярной картинами, мы уже не можем приписывать этим объектам *все* свойства частиц и *все* свойства волн».

Для объектов микромира не раз предлагались новые наименования. Так, Фейнман однажды использовал термин *wavicles*, производный от слов *waves* и *particles*. К сожалению, ни одно из наименований не было столь удачным, чтобы закрепиться в литературе. По привычке квантовые

образования чаще всего называют микрочастицами, но следует постоянно иметь в виду сказанное выше.

## 9 Квантовая механика

Попытки глубже понять природу корпускулярно-волнового дуализма привели в середине 1920-х годов к созданию *квантовой механики* – теории явлений, при описании которых определяющую роль играет постоянная Планка. Квантовая механика и ее развитие с учетом специальной теории относительности – *квантовая теория поля* – дают удовлетворительное описание всей совокупности явлений окружающего нас мира, за исключением гравитации. Отдельные стороны этого описания достигли замечательного согласия с экспериментальными данными – порядка  $10^{-10}$ , – что свидетельствует о высокой эффективности модели, созданной Эрвином Шрёдингером, Вернером Гейзенбергом, Максом Борном и Полем Дираком. Вместе с тем слова выдающихся физиков, приведенные в начале статьи, свидетельствуют о том, что квантовая механика, предоставляя непротиворечивую формальную процедуру расчета результатов экспериментов в области атомных явлений, в понятийном отношении ставит непростые вопросы. Джон Белл (1987), предложивший известные эксперименты по проверке квантовой механики, приходит к горькому выводу: «Когда я смотрю на квантовую механику, я вижу отвратительную теорию... Вы имеете теорию, которая неясна в корне»<sup>7</sup>.

### 9.1 Особенности аппарата

Рассмотрим предлагаемое квантовой механикой объяснение опыта по дифракции частиц, скажем, электронов, на двух достаточно узких щелях (в равной мере это описание можно распространить и на эксперимент с фотонами, обсуждавшийся в разделе 6). Анализ этого опыта позволяет ощутить формальную сторону расчетов квантовой теории. Для простоты рассмотрим стационарный процесс, когда источник  $O$  поставляет в среднем постоянное количество электронов (рис. 2). Требуется найти средний поток частиц в точке  $Q$ , удаленной от оси на расстояние  $x$ . При двух открытых щелях расчет сводится к следующему.

С помощью процедуры, краткое описание которой дано ниже, следует образовать два комплексных числа:  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  – *амплитуды вероятности* прохождения электрона соответственно через щели  $A$  и  $B$  с последующим попаданием в  $Q(x)$ . По определению, полная амплитуда вероятности попадания в  $Q$ , которую мы обозначим через  $\varphi(x)$ , равна сумме амплитуд, соответствующих всем взаимоисключающим путям; в данном случае

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x). \quad (9)$$

Знание амплитуды позволяет найти вероятность  $f(x)dx$  того, что произвольная частица, вышедшая из  $O$ , попадет в бесконечно малый интервал шириной  $dx$  около точки  $Q$ :

$$f(x)dx = |\varphi(x)|^2 dx. \quad (10)$$

Поток электронов около точки  $Q$  и количество фотособытий за единицу времени пропорциональны плотности вероятности  $f(x)$ . Из двух предыдущих формул следует:

$$f(x) = |\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2 + 2 \Re[\varphi_1^*(x)\varphi_2(x)], \quad (11)$$

где знаки  $\Re$  и  $*$  отвечают, соответственно, выделению действительной части комплексного числа и операции комплексного сопряжения. Классическое описание ограничилось бы первыми двумя слагаемыми в формуле (11), определяющими вероятность прохождения либо через первую щель, либо

<sup>7</sup> “When I look at quantum mechanics I see that it’s a dirty theory... You have a theory which is fundamentally ambiguous”.

через вторую. Квантовая механика вводит третье слагаемое, зависящее от фаз; именно соотношение фаз  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  позволяет дать адекватное описание интерференции микрочастиц. Все это напоминает операции, которые мы выполняли в разделе 6 при анализе дифракции света на двух щелях, но амплитуды вероятности нельзя трактовать как волны в обычном пространстве.

Очевидно, прежде чем обращаться к соотношению (11), следует указать, как вычисляются амплитуды вероятности и каковы правила обращения с этими величинами. Мы лишь бегло коснемся здесь этих вопросов в рамках нерелятивистской квантовой механики, отсылая за детальным изложением к лекциям Фейнмана (1965б) и учебникам по квантовой механике. Фейнман показал, что амплитуда вероятности  $\varphi$  для некоторой траектории определяется *действием*  $S$  – интегралом по времени от разности между кинетической и потенциальной энергиями – вдоль этой траектории:

$$\varphi \propto e^{iS/\hbar}, \quad (12)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\hbar$  – постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . Амплитуда перехода, рассматриваемая как функция конечного состояния, представляет собой знаменитую “пси-функцию”  $\psi(x, t)$ , составляющую основу принятого описания квантовых явлений. Для того чтобы найти  $\psi(x, t)$ , нужно либо решить *уравнение Шрёдингера*, либо вычислить действие  $S$  и воспользоваться формулой (12).

Отметим попутно, что представление (12) поясняет природу известного *принципа наименьшего действия*. Ввиду малости постоянной Планка траектории с сильно отличающейся величиной  $S$  характеризуются огромной разностью фаз, а потому их вклады гасят друг друга; лишь для траекторий вблизи экстремума  $S$  вариация фазы невелика, так что амплитуды суммируются конструктивно. Поэтому материальные частицы, подобно световым фотонам, “выбирают” пути, на которых действие экстремально.

Основное правило обращения с амплитудами вероятности гласит: если данное конечное состояние достижимо по нескольким независимым путям, то полная амплитуда вероятности процесса равна сумме амплитуд для всех путей, рассматриваемых порознь. Подчеркнем то обстоятельство, что линейность системы выполняется для *амплитуд* вероятности, тогда как сами вероятности связаны с амплитудами квадратичным образом. Строго говоря, в задаче о дифракции частиц на двух щелях конечной ширины следовало бы сложить амплитуды для совокупности всех путей из  $O$  в  $Q$ , охватываемых щелями, но при малой ширине щелей в первом приближении можно заменить каждый из пучков одной траекторией. Это приближение и подразумевается в уравнении (9).

При расчете амплитуды вероятности для траектории сложной формы оказывается полезным следующее правило: для всякого пути амплитуду вероятности можно представить в виде произведения амплитуд, отвечающих движению по отдельным участкам этого пути. Так, в нашей задаче амплитуда  $\varphi_1(x)$  есть произведение амплитуды  $\varphi(O \rightarrow A)$  перехода из  $O$  к щели  $A$  и амплитуды  $\varphi(A \rightarrow Q)$  перехода от щели  $A$  к точке  $Q(x)$ .

Решив уравнение Шрёдингера или выполнив расчеты согласно формуле (12) для отдельных участков двух возможных путей перехода от источника к интересующей нас точке детектора и перемножив затем соответствующие частные амплитуды, мы можем найти по формуле (11) распределение среднего потока частиц вдоль детектора.

## 9.2 Интерпретация

Приведенное выше краткое описание призвано лишь подчеркнуть наиболее важные черты квантовомеханического подхода:

*Базовая картина явлений описывается на языке амплитуд вероятностей – новых понятий, не имеющих классического аналога. Комплексные амплитуды вероятностей рассчитываются согласно заданной совокупности правил. Знание амплитуд позволяет найти вероятности различных событий, определяемые как квадраты модулей соответствующих амплитуд.*

(В)



Таким образом, квантовая механика изначально имеет дело с вероятностной картиной физических процессов (Макс Борн, 1926). Само по себе это обстоятельство не противоречит приведенному в разделе 4 положению **A**: *если вероятностные модели необходимы уже для описания классических неустойчивых систем, то они тем более неизбежны при описании явлений микромира, где предсказуемость измерений принципиально ограничена соотношениями неопределенности Гейзенберга*. Так, при постановке опыта, в котором одновременно измеряются координата частицы  $x$  и сопряженный ей импульс  $p$  стандартные отклонения  $\sigma_x$  и  $\sigma_p$  измеряемых величин подчиняются неравенству

$$\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2. \quad (13)$$

Ограничения такого характера формально включены в аппарат квантовой механики, их необходимость становится понятной из анализа простых мысленных экспериментов (см. Борн, 1935; Борн, 1963, гл. 4, § 7; Шпольский, 1974, § 148 и 149).

Действительно значимое отличие квантовой механики от классических моделей обусловлено не вероятностным способом рассуждений, но прежде всего – самим своеобразием квантового поведения, отказом от поисков более глубокой детерминистической картины явлений (*underlying picture*) и выяснением ключевой роли условий проведения эксперимента для возможностей описания изучаемого явления. Взятые в совокупности, эти черты потребовали введения новых понятий, включая и понятие волновой функции.

Классическая физика привлекала вероятностную модель какого-либо явления в ситуации, когда становилась очевидной невозможность дать полное его описание либо ввиду неустойчивости поведения, либо вследствие чрезмерной сложности сопутствующих процессов. Таково происхождение и моделей, связанных с бросанием кости, и теории брауновского движения, и ансамблей статистической физики. Всегда подразумевалась реальность пусть и недоступного для сколь-нибудь подробного описания, но *в принципе детерминированного* поведения исследуемой системы<sup>8</sup>. Ортодоксальная квантовая механика рассматривает вероятностную модель не как приближенное описание некоторой более глубокой картины явлений микромира, но как фундаментальную теорию. Это положение неоднократно выступало в разных видах на протяжении всей истории развития квантовой теории; достаточно сослаться на мнение Вольфганга Паули (1954): «Только волновая, или квантовая, механика позволила утверждать о существовании в законах природы *первичных вероятностей*, не сводимых с помощью вспомогательных гипотез к детерминистическим законам, в отличие, например, от термодинамических вероятностей классической физики. Подавляющее большинство современных физиков-теоретиков (прежде всего, М. Борн, В. Гейзенберг и Н. Бор, а к ним присоединился и я) считает этот вывод окончательным».

В начале 1950-х годов, когда было сделано это авторитетное заявление, определяющая роль неустойчивости движения в классической физике еще не была столь явственна; ныне ссылка на возможность сведения вероятностных моделей статистической физики и термодинамики к детерминистическим законам представляется несостоятельной. Что же касается «первичных вероятностей» квантовой механики, то Паули, надо полагать, имел в виду только неминуемость вероятностного описания микромира, но не бога, играющего в кости. Последнее стало бы неизбежным, *если бы речь шла только о Природе, как таковой*, однако в действительности мы всегда вынуждены давать *совместное* описание квантового явления и применяемой экспериментальной установки. В этой связи Макс Борн (1963) обратил внимание на тот факт, что до создания теории относительности понятие «одновременности» двух разнесенных в пространстве событий также считалось самоочевидным, и только выполненный Эйнштейном анализ опытных основ этого понятия показал его зависимость от системы отсчета. В.А. Фок характеризовал ситуацию в микромире как «относительность к средствам наблюдения». Существо дела хорошо поясняют два мнения, разделенные семью десятилетиями.

Во вступительной статье к дискуссии между Эйнштейном и Бором о полноте квантовомеханического описания реальности Фок (1936) дает следующие пояснения<sup>9</sup>: «Квантовая механика дей-

<sup>8</sup> Это имел в виду и Эйнштейн в 1916 г. в своей теории взаимодействия поля излучения с атомами. Однако эйнштейновские вероятности переходов явились провозвестниками новой квантовой теории. ...

<sup>9</sup> Сейчас вместо «максимально точный опыт» говорят «полный опыт».

ствительно занимается изучением объективных свойств природы в том смысле, что ее законы продиктованы самой природой, а не человеческой фантазией. Но к числу объективных понятий не принадлежит понятие о состоянии в квантовом смысле. В квантовой механике понятие о состоянии сливается с понятием “сведения о состоянии, получаемые в результате определенного максимально точного опыта”. В ней волновая функция описывает не состояние в обыкновенном смысле, а скорее эти “сведения о состоянии”. <... > Под максимально точным опытом мы разумеем такой, который позволяет найти все те величины, которые вообще могут быть известны одновременно. Это определение применимо как к классической, так и к квантовой механике. Но в классической механике максимально точный опыт был по существу один, а именно тот, который давал значение вообще всех механических величин, в частности координат и составляющих количества движения. Именно потому, что в классической механике любые два максимально точных опыта дают те же самые сведения о системе, и можно было говорить там о состоянии системы, как о чем-то объективном, не оговаривая, путем какого именно опыта получены сведения о нем».

Вторая выдержка позволяет судить о точке зрения современного исследователя, Дэвида Мермина: «Волновая функция – это творение человека. Ее назначение – дать нам возможность осмысливать результаты наших макроскопических наблюдений. Моя точка зрения прямо противоположна многомировой интерпретации. Квантовая механика – средство, позволяющее нам делать наблюдения понятными, а говорить о том, что мы находимся внутри квантовой механики и что квантовая механика должна быть применима к нашему восприятию, – нелогично» (цит. по статье Бирна [2008]).

Упомянутая Мерминым многомировая интерпретация касается толкования процесса измерения, предложенного Эвереттом (Н. Everett) в середине 1950-х годов (см. историю и ссылки в статье Бирна [2008]). Диссертация Эверетта обсуждалась до ее публикации в Копенгагене Бором и другими ведущими физиками; реакция была негативной. Пояснения Фока и замечание Мермина ясно вскрывают причину, по которой идею Эверетта нельзя считать приемлемой (см. также комментарии Фейнмана касательно роли наблюдателя, цитируемые в конце настоящего пункта).

Термин “объективность”, используемый в отношении понятия *состояние квантовой системы*, иногда воспринимается не вполне однозначно, поэтому, быть может, окажется полезным следующий пример. Допустим, что в нашем распоряжении имеется набор игральных костей, каждая из которых сделана асимметричной некоторым известным способом. Скажем, одна из костей изготовлена так, что цифра 6 выпадает крайне редко. Очевидно, результат бросания определяются как (субъективным) выбором кости из набора, так и (объективной) структурой этой кости. Подобно этому, результат квантовомеханического опыта зависит и от неизвестного нам “объективного состояния” системы, и от характера вопроса, задаваемого экспериментатором путем выбора условий опыта. Как заметил Джон Уилер, «Уравнение Шрёдингера для волновой функции соотносится с (непознаваемой) физической действительностью так же, как прогноз погоды с самой погодой».

Приведенное выше толкование волновой функции, выдержанное по существу в рамках ортодоксальной интерпретации квантовой механики, позволяет избежать некоторых известных парадоксов<sup>10</sup>. Так, включение волновой функции в число объектов физической реальности привело к обсуждению проблемы ее “схлопывания” со сверхсветовой скоростью (!) в результате проведения эксперимента. Но ведь тогда надо говорить и о том, что вероятностное распределение  $\{p_k\}$  возможных результатов бросания игральной кости “схлопывается” аналогичным образом в момент остановки кости. Как это не раз случалось, парадоксы возникают, когда введенные нами понятия приписываются самой Природе.

В этом же направлении нужно искать разумную интерпретацию опыта по дифракции электронов на двух щелях. Данные экспериментов определенно свидетельствуют о том, что дифрагируют *отдельные* электроны, как если бы каждый из них в одно и то же время проходил к детектору через обе щели. Подчеркивая неизбежность совместного описания изучаемого физического процесса

<sup>10</sup> Мы везде понимаем “парадокс” как “мнимое противоречие”. Фейнман [30] подчеркнул: «В физике никогда не бывает настоящих парадоксов, потому что существует только один правильный ответ <... > Поэтому в физике парадокс – всего лишь путаница в нашем собственном понимании».

и регистрирующего – по необходимости макроскопического – прибора, квантовая механика требует особой тщательности при выборе используемых слов и понятий. В данном случае адекватно поставленный вопрос формулируется следующим образом: *возможно ли в рамках какого-либо опыта одновременно наблюдать интерференционную картину и прохождение электронов через ту или другую щель?* Всесторонний анализ показывает, что использование любого средства, позволяющего установить траекторию электрона, немедленно уничтожает интерференцию (см., в частности, лекции Фейнмана (1965б) по квантовой механике). Поэтому вопрос о том, проходит ли электрон в опыте по интерференции через обе щели, бессодержателен в той же степени, как и широко дискутировавшийся в средние века вопрос о количестве чертей, уместяющихся на острие иголки. Никакой физический эксперимент не способен ответить на вопросы подобного рода, а потому физика вынуждена отказаться от классического понятия “траектория” в тех случаях, когда результат может быть достигнут различными путями, которым соответствуют заметно отличающиеся амплитуды вероятности.

Реальность удается успешно описать с помощью правила сложения амплитуд вероятностей, а то обстоятельство, что законы квантовой механики представляются нам абсурдными, говорит лишь о степени несоответствия нашего повседневного опыта законам микромира.

Нужно сказать, что наряду с недооценкой макроскопических условий опыта, задаваемых наблюдателем, достаточно широко распространена и точка зрения, явным образом переоценивающая роль наблюдателя при изучении квантовых явлений. Именно, полагают, что Природа реальна лишь в той мере, в которой она предстает перед наблюдателем. Эти воззрения часто связывают с Копенгагенской интерпретацией квантовой механики, хотя сам Нильс Бор (1971) вполне адекватно трактовал проблему измерений. Чувства действующего физика, постоянно связанного с обдумыванием новых данных эксперимента, ярко выразил Ричард Фейнман (1995, п. 1.4): «Это отвратительная (horrible) точка зрения. Seriously ли вы допускаете мысль, что без наблюдателя нет реальности? Какого наблюдателя? Любого наблюдателя? Является ли наблюдателем муха? Является ли звезда наблюдателем? Отсутствовала ли реальность во вселенной ранее  $10^9$  лет до н. э., когда зародилась жизнь? Или *вы* – тот самый наблюдатель? Тогда нет реальности в мире после вашей смерти?».

### 9.3 Квантовый хаос

В классической механике понятие “хаос” ассоциируется с выраженной неустойчивостью траекторий частиц при малых изменениях начальных данных и окружающих условий. Как мы видели, именно неустойчивость побуждает вводить вероятностные модели классических явлений, поэтому вполне закономерен вопрос: быть может, вероятностная природа квантовой теории обусловлена сходной неустойчивостью?

Очевидно, классическое понятие хаоса нельзя распространить непосредственно на квантовую механику, которая не только настаивает на принципиальной невозможности одновременного точного задания сопряженных координат и импульсов частиц, но и вообще обходится без слова “траектория”. Если принять, что полное описание реальности дается волновой функцией, то понятие “квантовый хаос” можно было бы попытаться связать с характером изменения волновой функции со временем, определяемым уравнением Шрёдингера. Однако последнее представляет собой уравнение *первого порядка*, всегда задающее устойчивую временную эволюцию: два близких – в некотором адекватном смысле – состояния остаются таковыми в течение всей последующей эволюции<sup>11</sup>. Как отмечает Дэвид Пулин (2002), это заключение следует уже из требования, чтобы энергия системы была действительной величиной. Напротив, описанию хаотических систем в классической физике сопутствуют дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков (конечно, привлечение таких уравнений не является *достаточным* условием хаотичности описываемого явления). Таким образом, продуктивное определение квантового хаоса, если в этом понятии есть нужда, следует искать в другом направлении.

Эти поиски ведутся. В частности, выясняется, что малое различие, – но уже не исходных состояний, а гамилтонианов, – может привести к экспоненциально быстрому расхождению изначально

<sup>11</sup> То же справедливо в отношении систем, для которых существует только *матрица плотности*.

близких систем. Другое важное направление – развитие *декогерентности* квантовых систем вследствие влияния окружающей среды. Ввиду специфического поведения хаотических систем упомянем и желательность уточнения теоремы Эренфеста, касающейся перехода к классическому пределу. Все эти исследования представляют самостоятельный интерес, однако не с ними нужно связывать вопрос об истоках вероятностной интерпретации квантовой механики. Мы имеем в виду «относительность к средствам наблюдения» и своеобразие понятия “состояние” в квантовой механике, о которых шла речь в предыдущем пункте. Уравнение Шрёдингера описывает не эволюцию состояния системы, существующего независимо от постановки эксперимента, но, говоря несколько упрощенно, временной ход потенциальных возможностей конкретного опыта в отношении изучаемой системы. Поэтому вообще неправомерно ожидать, что изменение волновой функции будет напоминать поведение классических частиц.

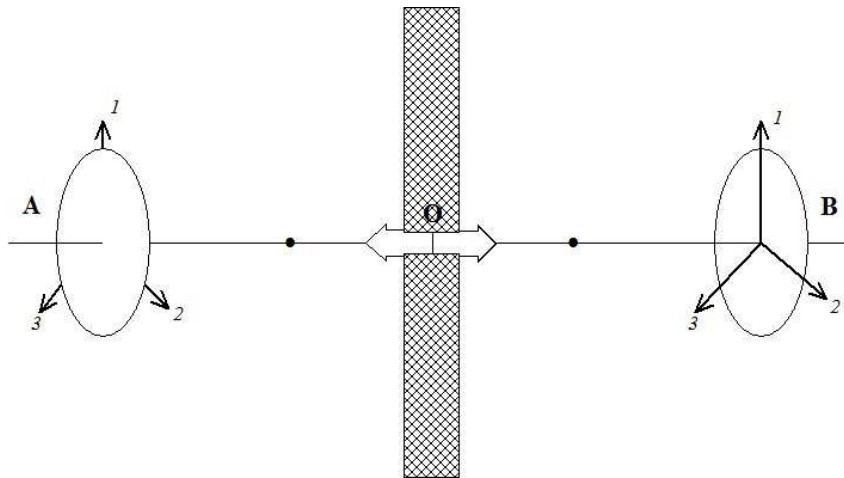
С другой стороны, неустойчивость эволюции важна не сама по себе; в классической физике она обуславливает факт, служащий действительным основанием для обращения к вероятностным моделям, а именно – она порождает ситуации, когда, говоря словами Дирака, «результат опыта не определен однозначно условиями, находящимися во власти экспериментатора». Но последнее по ряду причин в высшей степени свойственно и нашему опыту в микрофизике. Дело не только во влиянии классического наблюдателя на квантовые процессы. Неадекватность понятия траектории частиц результатам квантовых экспериментов отражает только одну сторону более общего понятия – *принципа тождественности микрочастиц*. Неразличимость как самих частиц данного класса (скажем, электронов), так и траекторий их движения служит основанием для правила сложения амплитуд, которое и обуславливает характерные особенности квантовой теории.

До сих пор мы ограничивались обсуждением нерелятивистской квантовой механики, ибо уже в рамках этой теории ясна неизбежность введения вероятностной модели. Однако интерпретация обширного круга данных эксперимента невозможна без привлечения специальной теории относительности. Картина мира, рисуемая соответствующей моделью, – квантовой теорией поля, – гораздо богаче красками. Так, выясняется, что физический вакуум “кипит” тем интенсивнее, чем меньше масштаб взаимодействия: из вакуума непрестанно “испаряются” новые частицы, которые почти сразу аннигилируют. Тем не менее *виртуальные* частицы зачастую успевают провзаимодействовать с реальными частицами и атомами, что обуславливает наблюдаемые эффекты (в частности, величину эйнштейновского коэффициента спонтанного перехода). Эта картина, более заслуживающая названия *квантовый хаос*, наглядно свидетельствует о закономерности вероятностного подхода при описании микромира.

## 10 Призрачное действие на расстоянии

К словам, вынесенным в заглавие этого параграфа, прибегают Эйнштейн, раньше других увидевший поразительные следствия квантовой теории. Первое слово в английской версии цитированной фразы – “*Spooky action at a distance*” – можно понимать не только как *призрачное*, но и как *ужасное*. В классической физике мы привыкли к тому, что взаимосвязь событий обусловлена либо действием одного из них на другое, либо их общей прошлой историей. По мнению Эйнштейна, Подольского и Розена (1935), ортодоксальная квантовая теория вводит новый тип взаимодействия, которое может проявляться в частях системы, уже переставших влиять друг на друга в обычном смысле. К этой работе столь часто обращаются, что для нее и для соответствующего эффекта стало употребительным сокращенное обозначение – ЭПР.

В статьях Шрёдингера, последовавших в том же году за работой ЭПР, был использован термин “entanglement” (*сплетённость*) свойств невзаимодействующих систем. За последнюю четверть века это явление подверглось основательной экспериментальной проверке; мы рассмотрим идеализированную версию реального эксперимента, сохраняющую суть оригинала (Бом, 1952). Чтобы отвлекаться от несущественных в данном контексте особенностей эксперимента, связанных с зарядом частиц, речь будет идти о нейтральной частице, скажем, нейтроне.



**Рис. 3.** Схема мысленного эксперимента по измерению спинов двух нейтронов, вылетающих из источника  $O$ . Приемники  $A$  и  $B$  разделены непроницаемой перегородкой (заштрихована), цифрами 1, 2 и 3 отмечены направления, в которых измеряется спин

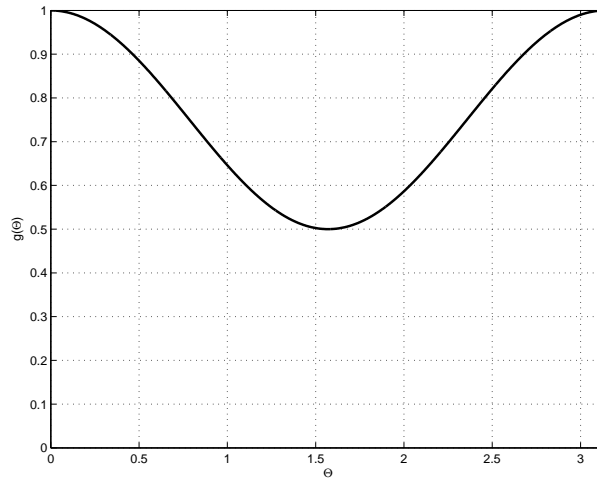
### 10.1 Мысленный эксперимент Эйнштейна, Подольского и Розена

Напомним сначала на конкретном примере некоторые особенности квантовых измерений. Пусть требуется измерить спин нейтрона – его собственный механический момент и связанный с ним магнитный момент. Это можно сделать с помощью установки Штерна-Герлаха, в которой микро-частицы пролетают между полюсами магнита, создающего сильное, и что важно – неоднородное, магнитное поле. Спин свободного нейтрона представляет собой вектор с произвольным направлением, поэтому можно было ожидать, что при измерении его проекции в направлении, заданном расположением полюсов магнита, мы получим некоторую величину из непрерывного диапазона значений. Опыт, однако, показывает, что вектор проекции спина нейтрона всегда равен по модулю  $\hbar/2$  и направлен к тому или другому полюсу магнита. Появление здесь постоянной Планка свидетельствует о том, что спин микро-частиц – чисто квантовое свойство; его косвенную аналогию в классической механике представляет момент вращения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции. Согласно принятому в квантовой механике толкованию, выбор одного из двух возможных направлений проекции спина нейтрона случаен. В рассматриваемом опыте соответствующие вероятности равны

$$p_+ = \cos^2(\theta/2), \quad p_- = \sin^2(\theta/2), \quad (14)$$

где  $\theta \in [0, \pi]$  – угол между вектором спина и направлением, в котором производится его измерение. Как видно из выражений (14), если спин изначально был направлен к одному из полюсов, то его измеренная проекция сохранит направление. Приведенные особенности опыта – частный случай общего положения квантовой механики: при измерении какой-либо наблюдаемой величины в замкнутой системе будет получено одно из *собственных значений*, отвечающих этой величине (Дирак, 1958, § 10). В данном случае собственные значения спина суть  $\pm\hbar/2$ .

Обратимся теперь к критическому опыту (рис. 3). В источнике  $O$  система из двух нейтронов готовится таким образом, что ее спин равен нулю. Затем система спонтанно разделяется, так что нейтроны летят в противоположных направлениях к наблюдателям  $A$  и  $B$ , в распоряжении которых имеются детекторы типа Штерна-Герлаха. Для краткости детекторы и нейтроны обозначаются буквами соответственно наблюдателям. Источник и наблюдатели рассматриваются в единой инерциальной системе отсчета; предполагается, что расстояния  $OA$  и  $OB$  одинаковы. (В принципиальном отношении выводы не меняются, если, скажем,  $OB$  несколько больше  $OA$ , так что измерение в  $B$  производится чуть позже такового в  $A$ .) Если детекторы весьма удалены друг



**Рис. 4.** Вероятность регистрации разнонаправленных проекций спинов нейтронов в зависимости от угла между ориентациями детектора и спина для полуклассической модели

от друга или разделены непроницаемой перегородкой, то незадолго до регистрации нейтроны уже не взаимодействуют между собой в классическом понимании этого слова. Поскольку результат измерения проекции спина одной частицы случаен, ясно, что таковым будет и результат каждого отдельного опыта по измерению спинов двух нейтронов с помощью соответствующих детекторов. Вопрос заключается в том, насколько коррелированы отсчеты детекторов  $A$  и  $B$ .

Сначала мы попытаемся предсказать результаты опыта с помощью полуклассической модели, допускающей возможность независимого рассмотрения удаленных нейтронов (локальность), но учитывающей квантовый характер измерения спина, выраженный надежно установленными на опыте соотношениями (14). Затем укажем выводы аналитического исследования той же задачи в рамках квантовой теории, и наконец, приведем соответствующие данные экспериментов.

## 10.2 Полуклассическая модель

На основании закона о сохранении спина замкнутой системы следует считать, что суммарный спин системы из двух разлетающихся нейтронов все время остается равным нулю. В классическом приближении, если бы такое существовало в отношении спина, можно было полагать, что нейтроны независимы а их спины направлены в противоположные стороны вдоль некоторой прямой, ориентация которой может произвольно меняться от опыта к опыту. Будем считать положительным направление от южного полюса детектора к его северному полюсу. Дальнейшие пояснения упрощаются, если мы снабдим каждый детектор двумя лампочками – зеленой и красной – и примем следующее условие: если зарегистрированная проекция спина нейтрона ориентирована в положительном направлении данного детектора, то загорается зеленая лампочка ( $G$ ), а в противном случае – красная ( $R$ ). Таким образом, в отдельном опыте может быть реализована одна из четырех комбинаций цветов загоревшихся лампочек:  $GG$ ,  $GR$ ,  $RG$  или  $RR$ . Найдем вероятности этих событий, предполагая для простоты, что детекторы ориентированы в одном и том же направлении, скажем, в направлении  $1$  (см. рис. 3).

Обозначим через  $\Theta \in [0, \pi]$  реализованное в данном опыте значение угла между направлением вектора спина нейтрона  $A$  и положительным направлением  $1$ ; тогда угол между спином нейтрона  $B$  и тем же направлением  $1^+$  будет равен  $\pi - \Theta$ . Как было сказано, измеренная в  $A$  проекция спина будет случайным образом направлена либо в положительную, либо в отрицательную сторону вектора  $1$ . Обозначим возможные результаты измерения для нейтрона  $A$  соответственно через  $A1^+$

и  $A1^-$ ; для нейтрона  $B$  возможные результаты будут  $B1^+$  и  $B1^-$ . Принимая во внимание независимость актов регистрации нейтронов и соотношения (14), получаем для искомых вероятностей событий:

$$\begin{cases} Pr(GG) = Pr(A1^+ \cdot B1^+) = \cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi-\Theta}{2}\right) = \cos^2(\Theta/2) \sin^2(\Theta/2), \\ Pr(GR) = Pr(A1^+ \cdot B1^-) = \cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi-\Theta}{2}\right) = \cos^4(\Theta/2), \\ Pr(RG) = Pr(A1^- \cdot B1^+) = \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi-\Theta}{2}\right) = \sin^4(\Theta/2), \\ Pr(RR) = Pr(A1^- \cdot B1^-) = \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi-\Theta}{2}\right) = \sin^2(\Theta/2) \cos^2(\Theta/2). \end{cases} \quad (15)$$

Нетрудно убедиться, что сумма всех вероятностей (15) равна 1.

Нас в особенности интересует вероятность того, что детекторы зарегистрируют разнонаправленные проекции спинов, т. е. зажгутся лампочки разного цвета:

$$Pr(GR) + Pr(RG) \equiv g(\Theta) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \Theta. \quad (16)$$

Функция  $g(\Theta)$  имеет смысл *условной* вероятности реализации интересующего нас события при заданном значении угла  $\Theta$ . Как показывает рис. 4, только при  $\Theta = 0$  и  $\Theta = \pi$ , т. е. когда “спиновая” прямая ориентирована так же, как и детекторы, разнонаправленные проекции спинов регистрируются с достоверностью; при несовпадающих ориентациях значения  $g(\Theta)$  заключены между 0.5 и 1.

Очевидно, модель с фиксированным значением  $\Theta$  недостаточна для объяснения реальных экспериментов; целесообразнее допустить, что этот угол каким-то образом меняется от опыта к опыту. Это означает, что  $\Theta$  следует рассматривать как случайную величину. В частности, при изотропной ориентации прямой, вдоль которой направлены спины нейтронов, вероятность того, что эта прямая попадет в пределы телесного угла  $d\omega$  равна  $d\omega/4\pi = \sin\theta d\theta d\varphi/4\pi$ , где множитель  $(1/2) \sin\theta$  есть плотность распределения полярного угла  $\theta$ , а  $1/2\pi$  – плотность распределения азимутального угла  $\varphi$ . Усредняя по углам величину  $p_+$  из (14), мы находим вероятность того, что в данном опыте детектор  $A$  регистрирует положительную проекцию спина, т. е. загорится зеленая лампочка:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi p_+(\theta) \sin\theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2(\theta/2) \sin\theta d\theta = 1/2. \quad (17)$$

Как и следовало ожидать, каждый из детекторов с вероятностью  $1/2$  регистрирует ту или противоположную проекцию спина – в длинной серии опытов лампочки разного цвета загораются одинаково часто. Однако нас больше интересует коррелированность результатов, для чего необходимо вычислить безусловную вероятность  $p_d$  зарегистрировать разнонаправленные спины. Это достигается усреднением по углам выражения (16) для функции  $g(\Theta)$ :

$$p_d = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) \sin\theta d\theta = 2/3. \quad (18)$$

Итак, полуклассическая модель предсказывает, что при изотропном распределении направления спинов нейтронов в среднем  $2/3$  опытов будут приводить к регистрации разнонаправленных проекций спинов, а в  $1/3$  случаев проекции будут направлены в одну сторону.

Рассмотренную нами изотропную модель нельзя считать обязательной, она представляет собой только пример одного из возможных распределений направления спинов разлетающихся частиц. Действительно важен лишь факт, следующий из вида функции  $g(\Theta)$  в (16): *при любом распределении направления спинов, допускающем отличие от ориентации детекторов, вероятность получить разнонаправленные проекции спинов при независимых актах их регистрации меньше 1.*

### 10.3 Результаты квантовомеханических расчетов

Приведем теперь кратко выводы, следующие из строгих расчетов в рамках квантовой механики. Дэвид Бом (1952) выполнил такие расчеты для ситуации, когда детекторы ориентированы единообразно и акты регистрации производятся одновременно<sup>12</sup>. Его выводы таковы:

1. В исходном состоянии системы, когда задан ее полный спин, допустимо лишь условно говорить о спинах отдельных нейтронов. Возможные спиновые состояния пары нейтронов, которые изображаются как  $\uparrow\downarrow$  и  $\downarrow\uparrow$ , *интерферируют* между собой, и именно эта интерференция обеспечивает как фиксированное значение суммарного спина в течение опыта, так и сопряженность результатов измерения спинов для удаленных нейтронов.
2. В отдельных опытах возможные значения проекции спина каждого из нейтронов, положительное и отрицательное, реализуются случайно с вероятностью  $1/2$ ; при этом детекторы  $A$  и  $B$  всегда регистрируют противоположные направления спинов.
3. Однозначная связь между результатами измерения спинов частиц не указывает на какое-либо влияние одного из них на другой после прекращения взаимодействия, понимаемого в классическом смысле.

Таким образом, предсказания двух теорий существенно различны: согласно квантовой механике всегда регистрируются противоположно направленные проекции спинов частиц, т. е.  $p_d = 1$ , тогда как для всех нетривиальных полуклассических моделей имеется ненулевая вероятность одинаково направленных проекций и  $p_d < 1$ .

Почему же предположение о независимости состояний нейтронов не выполняется, если квантовая теория подтверждает, что взаимодействие нейтронов друг с другом отсутствует? Причина заключается в том, что оба нейтрона все время составляют единую квантовую систему, которая в результате акта измерения переходит в одно из двух своих собственных состояний. В каждом из собственных состояний системы проекции нейтронных спинов противоположны. «Если в природе имеются две взаимодействующие частицы, то не существует способа описать то, что происходит с одной из частиц, попытавшись выписать волновую функцию для нее одной. Известные парадоксы... где объявлялось, что измерения, сделанные над одной частицей, в состоянии предсказать, что будет с другой, или что они могут разрушить интерференцию, причинили людям много неприятностей, потому что они пытались придумать волновую функцию одной отдельной частицы вместо правильной волновой функции координат обеих частиц. Полное описание можно провести только в терминах функций координат обеих частиц» (Фейнман, 1965б, §16.4 оригинального изд. или §14.4 русского перевода). Глубокий анализ физической стороны эффекта ЭПР дан Л.И. Мандельштамом (1950) в лекциях по квантовой механике.

### 10.4 Проверка неравенств Белла

Мысленный опыт ЭПР оставался в таком качестве до появления работы Белла (1964), в которой была указана возможность его экспериментальной проверки. Представим себе, что в схеме, показанной на рис. 3, производится серия опытов описанного выше типа, однако теперь детекторы не фиксированы в одном направлении – наблюдатели выбирают одну из трех возможных ориентаций своих приборов случайным образом независимо друг от друга. Как и раньше, в отдельном опыте наблюдатель регистрирует событие одного из двух типов: G) направление измеренной проекции спина совпало с условно выбранной положительной ориентацией полюсов магнита и R) измеренная проекция спина направлена противоположно. Белл доказал, что рассмотрение нейтронов как независимых частиц (локальность) влечет за собой выполнение строгого неравенства для вероятностей комбинаций событий определенного типа.

<sup>12</sup> Рассмотрение аналогичного по сути процесса распада позитрония дано в Фейнмановских лекциях по физике (1965б), §18.3 (§16.3 русского перевода). Это решение кратко воспроизводится в Дополнении к настоящей статье.



Собственно, для того чтобы убедиться в нелокальности взаимодействия квантовых систем, достаточно было провести опыты в постановке, описанной в разделе 10.2. Однако по причинам, в которые мы не будем входить, выполнение такого реального эксперимента затруднительно. Теорема Белла, особенно в той форме, которую ей придали Клаузер с сотрудниками (1969), позволяет реально сопоставить выводы классической и квантовой моделей. То обстоятельство, что почти во всех проведенных опытах вместо нейтронов использовались фотоны, а измерялась не проекция спина, а поляризация фотонов, не меняет сути проблемы. Пары фотонов с коррелированными линейными поляризациями формировались при двухфотонных переходах возбужденных атомов, направление поляризации каждого фотона выяснялось с помощью кристаллов кальцита или иных анализаторов (Шимони, 1988).

Почти все опыты, начиная с первого из них, выполненного Фридманом и Клаузером (1972), свидетельствуют о *нарушении* неравенств Белла; в тех случаях, когда был получен противоположный результат, последующая проверка выявила недостатки эксперимента. Как было сказано выше, неравенства Белла должны выполняться при справедливости локальной модели, поэтому их нарушение говорит о том, что *предположение о локальности классического толка несовместимо с поведением микромира*. Широкую известность получили опыты, выполненные Аспектом и др. (1982) (см. также Аспект, 1999; Мермин, 1981; Брайда и др., 2000). Для того чтобы исключить возможность взаимного влияния актов регистрации в ходе данного эксперимента, выбор ориентации анализаторов поляризации производился во время полета фотонов. Недавно были выполнены эксперименты по корреляции фотонов в частях установки, расстояние между которыми достигало 18-ти километров (Салар и др., 2008); эти опыты вновь продемонстрировали нелокальность квантового поведения света. При всей эффектности описываемых экспериментов нужно признать, что в принципиальном отношении они мало добавили со времени дискуссии между Эйнштейном и Бором относительно смысла эффекта ЭПР. Надежда Белла “улучить” квантовую механику в противоречивости не оправдалась...

## 10.5 Иллюзорные сверхсветовые скорости

Классическая интерпретация упомянутых выше опытных данных с неизбежностью ведет к допущению возможности передачи сигналов между удаленными наблюдателями со сверхсветовой скоростью, что противоречит надежно проверенному на опыте постулату специальной теории относительности. В многочисленных публикациях, причем не только популярных, приводятся по этому поводу достаточно туманные пояснения. В частности, ссылаются на таинственную “редукцию волновой функции” (волнового пакета), которую мы уже комментировали в разделе 9, посвященном законам квантовой механики. Между тем в рамках последней вообще не требуется передачи сигнала (информации) между наблюдателями как при одинаковой, так и при независимой ориентации детекторов. В обоих случаях лампочки разного цвета при каждом из детекторов загораются одинаково часто, и если наблюдатели изолированы друг от друга, то сильная корреляция результатов измерений остается для них неизвестной. Наличие корреляции обнаружится только после завершения достаточно длинной серии опытов, когда все данные будут собраны в одном месте. То же справедливо и для ситуации, когда один из наблюдателей станет изменять ориентацию своего детектора, пытаясь тем самым закодировать сообщение своему коллеге: лампочки разного цвета при каждом детекторе загораются одинаково часто, а корреляция результатов остается скрытой.

Стоит еще заметить, что знание наблюдателями квантовых законов также не способствует передаче информации между ними. Допустим, что детекторы ориентированы одинаково и наблюдатель *A* расположен несколько ближе к источнику, чем *B*, так что первый из них произведет измерение немного раньше второго. Если у наблюдателя *A* зажигается зеленая лампочка, то он немедленно получает один бит информации относительно результата наблюдателя *B*: у последнего должна зажечься красная лампочка. Однако эта информация обеспечивается совокупностью *всех* этапов опыта: приготовлением исходной двухчастичной системы, предоставлением наблюдателям соответствующих сведений, и наконец, разлетом частиц от источника к детекторам. Поясним это простым примером. Предположим, что обитатель Сибири направляет послания двоим приятелям, живущим

в Париже и в Токио. Все трое заранее условились, что в один из конвертов случайным (например, равновероятным) образом вкладывается бумажка зеленого цвета, а в другой – красного. Очевидно, вскрыв конверт, парижанин в тот же миг узнает цвет вкладыша в конверте жителя Токио. При этом информация между удаленными пунктами не передается – связанность событий обусловлена их общей прошлой историей.

Различие с квантовой ситуацией заключается в том, что результат жителя Токио не зависит от того, как парижанин ориентировал ножницы при вскрытии конверта, тогда как выбор ориентации детектора наблюдателем *A* *изменяет* результат всего опыта. По сути дела мы видим здесь то же проявление специфики квантового поведения, которое в опыте по дифракции электронов на двух щелях квалифицировалось как “нелокальность”. Этого вполне достаточно, чтобы еще раз, говоря словами Бора, испытать потрясение при знакомстве с квантовой механикой, однако совершенно излишне привлекать рассуждения о воздействии на удаленные объекты со сверхсветовой скоростью. Как и большинство других парадоксов квантовой механики, такие рассуждения обусловлены неадекватным использованием понятия “состояние” квантовой системы (см. выше пункт 9.2). *Изменяя ориентацию детектора, исследователь ставит новый опыт, описание которого входит как составная часть в новое состояние всей системы.* Вполне естественно, что изменение условий эксперимента может повлиять на получаемый результат. Выбором ориентации своего детектора наблюдатель *селектирует* возможные альтернативы эксперимента, создавая тем самым иллюзию влияния на удаленный объект. Для дальнейшего “объяснения” эффекта нам остается только повторить сказанное в пункте 10.3 и сослаться на анализ, приведенный в Дополнении.

Эйнштейн справедливо полагал непосредственное действие на расстоянии недопустимым в физических теориях, однако в квантовой механике нет нужды прибегать к этому понятию. «Мы сталкиваемся в атомной физике с совершенно новой ситуацией, когда принципиально невозможно провести четкое разграничение между внутренними свойствами объектов и их взаимодействием с измерительными приборами, которые необходимо использовать для самого обнаружения этих свойств» (Бор, 1971, с. 383).

## 11 Кот Шрёдингера мог бы играть в кости

Впечатляющую иллюстрацию понятия *сплетенности* (entanglement) квантовых состояний предложил Эрвин Шрёдингер в статьях 1935 года, инициированных работой Эйнштейна, Подольского и Розена. Речь идет о мысленном эксперименте, в котором кот находится в суперпозиции частично живого и частично мертвого состояний. Рассмотрим вероятностную сторону этого построения.

Представим себе, что в замкнутый ящик помещены: кот, крупица радиоактивного вещества, счетчик Гейгера, ампула с быстродействующим ядом и некий исполнительный механизм, разбивающий ампулу при срабатывании счетчика. Период полураспада радиоактивных атомов составляет 1 час, освобождение яда приводит к немедленной гибели кота. Критический вопрос заключается в следующем: как сторонний наблюдатель должен описать состояние кота по прошествии нескольких часов?

Обычно рассуждают следующим образом. Имеются два собственных состояния всей (замкнутой) системы: первое соответствует ситуации, когда  $\beta$ -частица еще не заставила сработать счетчик, ампула цела и кот здоров; второе состояние отвечает случаю, когда яд пролился, результатом чего явилась гибель кота. Полное описание системы дается волновой функцией, представляющей собой суперпозицию собственных состояний с весовыми коэффициентами, которые определяются деталями опыта. Как уже отмечалось выше, одно из возможных состояний всякой замкнутой системы реализуется лишь в момент времени, когда производится акт измерения. Поэтому кот частично жив и в то же время частично мертв до тех пор, пока наблюдатель не откроет ящик и тем самым не “измерит” его состояние.

Классический опыт говорит нам, что объект находится в каком-либо одном из возможных для него состояний независимо от того, производится ли измерение. (Эйнштейн: «Луна существует и тогда, когда я на нее не смотрю».) Соответственно, “классический кот” *либо* жив, *либо* мертв – мы

только не знаем, в каком именно состоянии он находится. Напротив, приведенное выше описание ведет к заключению, что кот находится именно в странной *суперпозиции* собственных состояний.

Проведем теперь более внимательное рассмотрение опыта. Прежде всего нужно подчеркнуть, что подсистему замкнутой системы, в данном случае – кота, вообще говоря, нельзя характеризовать волновой функцией. Состояние подсистемы описывается с помощью введенной фон Нейманом *матрицы плотности*, которая отвечает смеси нескольких *чистых* состояний, взятых с заданными весами. В теории вероятностей это соответствует т. н. *рандомизации* функции распределения по возможным значениям какого-либо параметра. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц (1963) указывают: «Для состояний, обладающих лишь матрицей плотности, не существует полной системы измерений, которые приводили бы к однозначно предсказуемым результатам». Отметим еще, что эволюция подсистемы зависит от всех деталей ее взаимодействия с остальной частью системы.

Итак, до того момента, когда наблюдатель откроет ящик, не существует способов выяснить состояние кота, а потому вопрос о его самочувствии бессодержателен. Физика отвечает лишь на разумно поставленные вопросы<sup>13</sup>. Современные опыты с *макроскопическими* системами, обладающими двумя собственными состояниями, адекватно описываются с помощью аппарата квантовой механики (Блаттер, 2000).

В опыте Шрёдингера ситуация драматизируется тем обстоятельством, что в нем участвует привычное нам живое существо. В принципиальном отношении ничто не изменится, если кота заменить, скажем, маятниковыми часами, а яд – стопором. Можно пойти еще дальше и вместо часов поместить в замкнутую систему микролазер или даже колеблющуюся двухатомную молекулу.

Парадокс с котом Шрёдингера разрешается и без использования таких формальных понятий, как матрица плотности: *условна сама терминология, привлекающая понятие системы, находящейся частично в различных состояниях*. Так, анализируя описанный в разделе 5 опыт с прохождением света через кристалл турмалина, Дирак (1958) пишет: «Для того чтобы связать результаты этого опыта с результатами других опытов, которые могли бы быть произведены с фотонами, объединить их все в общую схему, требуется более подробное описание. Такое описание не следует рассматривать как попытку ответить на вопросы, лежащие за пределами науки, а как вспомогательное средство для формулировки правил, выражающих в сжатой форме результаты многочисленных опытов. Квантовая механика дает следующее более подробное описание. Предполагается, что фотон, поляризованный под углом к оптической оси, можно рассматривать как находящийся частично в состоянии поляризации, параллельной оси, и частично в состоянии поляризации, перпендикулярной оси». Очевидно, пребывание кота в двух состояниях не более удивительно, чем аналогичное поведение фотона. В этом же смысле нужно понимать и «одновременное» прохождение электрона по всем возможным траекториям в подходе Фейнмана (см. пункт 9.1).

Затронем еще любопытный вопрос: изменится ли описание системы с точки зрения внешнего наблюдателя, если радиоактивное вещество заменить обычной игровой костью? Скажем, через заданное время стрелка часов (или сам кот) сбрасывает кость с весьма значительной – по сравнению с ее размерами – высоты. В случае выпадения нечетной цифры исполнительный механизм (или кот) разбивает ампулу с ядом.

Вопрос затрагивает широко распространенное убеждение, что «... без  $\beta$ -частицы ни у кого и мысли не могло бы возникнуть о допущении такой странной суперпозиции» (Кадомцев, 1999). Многие полагают, что только атомные явления, в частности радиоактивный распад, обеспечивают «настоящую» случайность, в отличие от поведения макроскопических тел, обусловленного законами классической механики. Однако в опыте с котом Шрёдингера, если он рассматривается квантовомеханически, не имеет значения, каким именно образом обеспечивается необходимость вероятностного описания подсистемы с точки зрения внешнего наблюдателя. Что же касается качества устройства, реализующего стохастичность, то анализ вероятностных моделей классической физики позволяет утверждать: при соблюдении простых условий, обеспечивающих неустойчивость движения, поведение кости столь же непредсказуемо, как и момент радиоактивного распада. В конце концов, не

<sup>13</sup> Но, как и вообще наука, физика способна ответить не на *все* разумные вопросы.

нарушая принципиальной стороны опыта, игральную кость можно уменьшить до размеров брауновской частицы.

## 12 Заключительные замечания

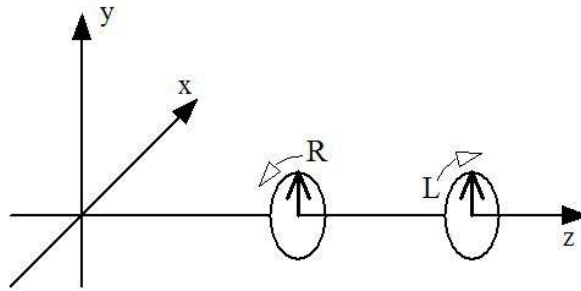
Приведенные выше примеры убедительно свидетельствуют о том, что бог не играет в кости – в квантовом мире, как и в классической механике, вероятностные понятия присущи лишь моделям реальных явлений, но не самой Природе. Слово *модель* является здесь ключевым – как только стохастическое поведение приписывается каким-либо реальным объектам, будь то морские волны, бильiardные шары, молекулы или фотоны, появление противоречий становится неизбежным. Это утверждение представляется столь очевидным, что остается только удивляться, сколь широко в литературе, включая и классические работы, излагается противоположная точка зрения. Вероятностные понятия, как раздел математики, создавались в течение нескольких столетий именно для того, чтобы формализовать разнообразный жизненный опыт и данные науки. Было бы странно полагать, что эти понятия изначально “встроены” в объективную реальность; теория вероятностей – лишь один из наиболее эффективных инструментов моделирования Природы. К таковым можно отнести, например, и теорию операторов в гильбертовом пространстве.

Другой вывод состоит в том, что стандартная квантовая механика, в рамках которой проводилось наше обсуждение, дает, пусть и странное, но логически последовательное объяснение всем выполненным до сих пор экспериментам. Этого достаточно, чтобы оставить в стороне столь распространенные в последнее время попытки связать интерпретацию опытов с сознанием наблюдателя, рождением вселенных при каждом акте наблюдения, передачей информации со сверхсветовой скоростью и другими явлениями мистического характера. Сказанное отнюдь не исключает поисков моделей, отличных от теорий Шрёдингера, Гейзенберга и Фейнмана; быть может, они дадут более глубокую и наглядную картину квантовых процессов (собственно, подход Фейнмана и служит таким примером). Новые опыты могут потребовать и принципиально иного подхода, однако ожидать появления *детерминистической* базовой модели совершенно нереально.

Отметим также, что вероятностная формулировка моделей реальных процессов обуславливает статистический характер *обратной задачи*, заключающейся в выяснении истинных свойств процессов по их наблюдаемым проявлениям (Теребиж, 1995, 2005).

Неоднократно указывалось, что трудности с пониманием квантовой теории обусловлены, прежде всего, непривычностью поведения квантовых систем: повседневный опыт человека говорит нам о свойствах массивных тел и волн в окружающей нас среде, тогда как микрочастицы не являются ни тем, ни другим. Это справедливо, и все же трудно избежать ощущения, что правила квантовой механики представляют собой совокупность странных процедур, не обоснованных ничем, кроме их безусловной практической эффективности. Не будь статистической физики, аналогичные чувства вызывали бы и законы термодинамики – при всей их важности в технике. В сходном контексте Ричард Фейнман рассказал об алгоритме для предсказания солнечных затмений, выработанном в течение столетий южноамериканскими индейцами. Из поколения в поколение жрецы передавали ученикам веревочки с множеством завязанных узелков; на запоминание правил обращения с узелками уходили многие годы, но смысл этих правил оставался для индейцев совершенно таинственным. Добавим – система работала, как и модель, предложенная Фалесом из Милета в 6-м веке до нашей эры; существенное различие подходов состоит в том, что теория Фалеса, не объясняя природы движения небесных тел, исходила, тем не менее, из простой модели солнечной системы. Так и критикам квантовой механики хотелось бы иметь пусть и непривычную, но более глубокую модель явлений микромира, из которой следовала бы совокупность квантовых правил.

В ответ на соображения такого рода сторонник ортодоксальной интерпретации квантовой механики может напомнить историю возникновения уравнений классической электродинамики. Джеймс Клерк Максвелл, написавший полную систему уравнений, затратил много усилий на создание механистической модели явлений, ведущей к уравнениям электродинамики. Это оказалось неразрешимой задачей, тогда как сами по себе уравнения Максвелла со временем стали привычными настоль-



**Рис. А1.** Определение правой (R) и левой (L) круговой поляризации фотонов. Наблюдатель расположен в направлении  $z^+$

ко, что физики оставили в стороне вопрос об их происхождении. Аналогичная ситуация сложилась и в отношении базовых положений классической механики, в частности, закона инерции.

Восемь веков тому назад король Кастилии Альфонс X, прозванный Мудрым, имел основания заметить: «Если бы я присутствовал при творении Мира, я бы порекомендовал сделать что-нибудь попроще». Мы можем только гадать, что сказал бы Альфонс X, ознакомившись с квантовой механикой. По-видимому, проще не получилось.

Автор глубоко признателен В.В. Бирюкову и Ю.А. Кравцову за стимулирующее обсуждение затронутых вопросов и конструктивные предложения. Ю.А. Кравцов указал, в частности, на важность учета низкочастотного электромагнитного излучения при столкновениях молекул и необходимость обсуждения проблемы квантового хаоса.

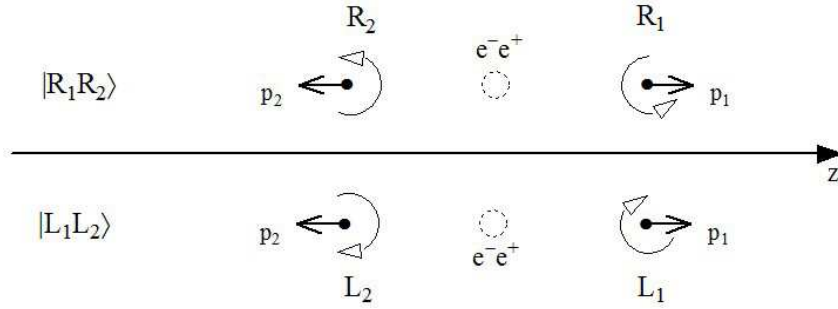
### Дополнение. Аннигиляция позитрония

В приводимом нами описании опыта по регистрации нейтронов дается лишь ссылка на формальное решение задачи в рамках квантовой механики, выполненное Бомом (1952). Ниже мы кратко воспроизводим аналитическое рассмотрение сходного по сути процесса – аннигиляции атома позитрония, – содержащееся в §18.3 лекций Фейнмана (1965б) (в русском переводе – т. 9, § 16.3). Это решение тем более поучительно, что оно дано с присущей Ричарду Фейнману ясностью и проведено в контексте современного подхода к квантовой механике.

Атом позитрония составлен из электрона  $e^-$  и противоположной ему по знаку электрического заряда частице – позитроне  $e^+$ . Спин каждой из этих частиц равен  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ); изначально рассматривается покоящийся атом с антипараллельными спинами компонентов и нулевым общим спином. Характерное время жизни такой системы составляет около  $10^{-10}$  сек, после чего электрон и позитрон аннигилируют с испусканием двух  $\gamma$ -квантов. Последние разлетаются в противоположных направлениях с равными по величине скоростями, направление разлета распределено изотропно. Нас интересует поляризация образовавшихся фотонов.

В данном случае для описания фотонов удобно выбрать состояние круговой поляризации. Напомним (рис. А1), что монохроматической световой волне условно приписывается правая круговая поляризация, если при ее движении к наблюдателю вектор электрического поля описывает окружность в направлении *против* часовой стрелки; составляющие волну фотоны соответственно считаются правополяризованными (состояние  $|R\rangle$ ). В пучке левополяризованных фотонов (состояние  $|L\rangle$ ) вектор электрического поля вращается по часовой стрелке, если смотреть на приближающуюся волну.

Очевидно, допустимы две альтернативные моды распада, сохраняющие нулевой суммарный спин системы (рис. А2). В первой моде образуются два правополяризованных фотона; каждый из них



**Рис. А2.** Альтернативные состояния пары фотонов, возникшей в результате аннигиляции позитрония

имеет момент  $+1$  относительно своего импульса, но моменты относительно оси  $z$  равны  $+1$  и  $-1$ . Обозначим это состояние системы посредством  $|R_1R_2\rangle$ . Во второй моде, обозначаемой через  $|L_1L_2\rangle$ , образуются два левополяризованных фотона. Будем полагать, что  $|R_1R_2\rangle$  и  $|L_1L_2\rangle$  составляют ортонормированный базис.

Согласно принципу суперпозиции, финальное состояние системы после аннигиляции  $|F\rangle$  представляет собой линейную комбинацию альтернативных состояний  $|R_1R_2\rangle$  и  $|L_1L_2\rangle$ . Для нахождения соответствующих коэффициентов нужно принять во внимание два условия: 1) исходное состояние – атом позитрония с нулевым спином – характеризуется отрицательной четностью, и такова же должна быть четность  $|F\rangle$ ; 2) нормировка  $|F\rangle$  должна обеспечивать единичную сумму вероятностей всех возможных реализаций. Единственная линейная комбинация альтернативных состояний, удовлетворяющая обоим условиям, имеет вид:

$$|F\rangle = (|R_1R_2\rangle - |L_1L_2\rangle) / \sqrt{2}. \quad (\text{A1})$$

В самом деле, операция пространственной инверсии  $\hat{P}$  изменяет как направление движения фотона, так и направление его поляризации, поэтому  $\hat{P}|R_1R_2\rangle = |L_1L_2\rangle$ ,  $\hat{P}|L_1L_2\rangle = |R_1R_2\rangle$ . Как следствие,  $\hat{P}|F\rangle = -|F\rangle$ , что свидетельствует о сохранении четности при аннигиляции позитрония.

Имея финальное состояние системы, можно рассчитать амплитуды и вероятности событий различного рода. В частности, амплитуды двух альтернативных типов распада, о которых выше шла речь, суть

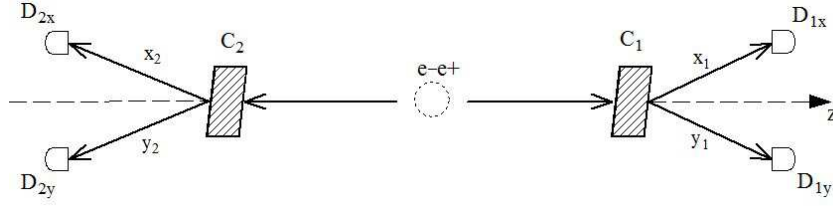
$$\langle R_1R_2|F\rangle = 1/\sqrt{2}, \quad \langle L_1L_2|F\rangle = -1/\sqrt{2}, \quad (\text{A2})$$

так что вероятности обеих мод равны  $1/2$ . Физически представление (A1) означает, что детекторы, установленные в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$ , будут всегда регистрировать равновероятно либо пару правых, либо пару левых фотонов.

В контексте обсуждаемого в разделе 10 вопроса о возможности действия на расстоянии представляет интерес схема опыта, изображенная на рис. А3. Фотоны, разлетающиеся после аннигиляции позитрония, проходят через кристаллы кальцита, в результате чего становятся линейнополяризованными либо в  $x$ -, либо в  $y$ - направлении. Каждый из четырех возможных каналов распространения фотонов снабжен детектором излучения. Требуется выяснить характер работы этой схемы при последовательном наблюдении многих процессов аннигиляции. Конкретно, поскольку при каждой аннигиляции допустимо срабатывание одной из четырех пар счетчиков:  $D_{1x}$  и  $D_{2x}$ ,  $D_{1x}$  и  $D_{2y}$ ,  $D_{1y}$  и  $D_{2x}$  или, наконец,  $D_{1y}$  и  $D_{2y}$ , нужно найти вероятности соответствующих процессов.

Вычислим, в качестве примера, амплитуду  $\langle y_1x_2|F\rangle$  события, состоящего в срабатывании счетчиков  $D_{1y}$  и  $D_{2x}$ . Принимая во внимание представление (A1), находим:

$$\langle y_1x_2|F\rangle \cdot \sqrt{2} = \langle y_1x_2|R_1R_2\rangle - \langle y_1x_2|L_1L_2\rangle. \quad (\text{A3})$$



**Рис. А3.** Схема регистрации фотонов, образовавшихся при аннигиляции позитрония.  $C_1$  и  $C_2$  – кристаллы кальцита;  $x_1, y_1, x_2$  и  $y_2$  – пути фотонов, линейно поляризованных в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $D_{1x}, D_{1y}, D_{2x}$  и  $D_{2y}$  – счетчики фотонов

Поскольку акты регистрации фотонов разными детекторами суть независимые события, полагаем

$$\langle y_1 x_2 | R_1 R_2 \rangle = \langle y_1 | R_1 \rangle \langle x_2 | R_2 \rangle \quad (A4)$$

и аналогично для  $\langle y_1 x_2 | L_1 L_2 \rangle$ . В результате выражение (A3) принимает вид:

$$\langle y_1 x_2 | F \rangle \cdot \sqrt{2} = \langle y_1 | R_1 \rangle \langle x_2 | R_2 \rangle - \langle y_1 | L_1 \rangle \langle x_2 | L_2 \rangle. \quad (A5)$$

Далее нужно учесть, что состояния правой и левой круговой поляризации связаны с состояниями линейной поляризации вдоль  $x$ - и  $y$ - направлений соотношениями

$$\begin{cases} |R\rangle = (|x\rangle + i|y\rangle) / \sqrt{2}, \\ |L\rangle = (|x\rangle - i|y\rangle) / \sqrt{2}. \end{cases} \quad (A6)$$

Учитывая ортонормированность системы  $|x\rangle$  и  $|y\rangle$ , имеем из (A6):

$$\begin{cases} \langle y_1 | R_1 \rangle = i/\sqrt{2}, & \langle x_2 | R_2 \rangle = 1/\sqrt{2}, \\ \langle y_1 | L_1 \rangle = -i/\sqrt{2}, & \langle x_2 | L_2 \rangle = 1/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (A7)$$

Подстановка этих выражений в (A5) дает окончательно:

$$\langle y_1 x_2 | F \rangle = i/\sqrt{2}, \quad (A8)$$

так что вероятность соответствующего процесса равна  $1/2$ .

Амплитуды остальных трех процессов вычисляются аналогично; в результате мы получаем:

$$\begin{cases} \langle x_1 x_2 | F \rangle = \langle y_1 y_2 | F \rangle = 0, \\ \langle x_1 y_2 | F \rangle = \langle y_1 x_2 | F \rangle = i/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (A9)$$

Эти выражения показывают, что *всегда, и с одинаковыми вероятностями, срабатывает одна из пар счетчиков в каналах со взаимно ортогональной поляризацией фотонов: либо  $D_{1x}$  и  $D_{2y}$ , либо  $D_{1y}$  и  $D_{2x}$ ; вероятности срабатывания пар с поляризациями фотонов в одном направлении равны нулю*. Анализ Фейнмана процесса аннигиляции позитрония приводит к тем же заключениям, что и перечисленные в пункте 10.3 выводы из расчетов Бома, касающихся регистрации частиц с половинным спином.

Таковы предсказания квантовой теории, полностью согласующиеся с экспериментальными данными. В чем же усматривают парадоксальность описываемой ситуации? Допустим, что наблюдатель 2 расположен немного дальше от атома позитрония, чем наблюдатель 1. Тогда срабатывание того или иного счетчика наблюдателя 1 позволит ему с определенностью предсказать, какой именно счетчик сработает у наблюдателя 2. Однако фотон, летящий к наблюдателю 2, находится в суперпозиции состояний с линейной поляризацией  $|x_2\rangle$  и  $|y_2\rangle$ , и потому, казалось бы, этот фотон может с некоторыми ненулевыми вероятностями достичь одного из детекторов 2 *независимо от результата, полученного наблюдателем 1*. Почему факт регистрации фотона удаленным наблюдателем

полностью определяет результат еще не произошедшего опыта? Означает ли это, что существует некое взаимодействие, передающееся со скоростью выше скорости света в пустоте?

В лекциях Фейнман приводит подробную интерпретацию опыта, с которой, конечно, следует внимательно ознакомиться. С нашей точки зрения, ответ на поставленные выше вопросы дает уже сама структура представления (A1): *пара образовавшихся при аннигиляции фотонов изначально приготовлена так, что два соответствующих детектора всегда регистрируют круговую поляризацию одного типа. Эта “приготовленность” системы сохраняется и после прохождения фотонов через кристаллы кальцита, что и обуславливает срабатывание пар детекторов со взаимно ортогональной поляризацией фотонов.* Никакого, тем более сверхсветового, влияния на удаленный процесс не требуется. Ситуация аналогична рассмотренному в пункте 10.5 примеру с отправкой писем в удаленные пункты с той существенной (но уже знакомой) разницей, что квантовые процессы нелокальны.

«Если вы все еще не удовлетворены и считаете это “парадоксом”, то покажите, что это действительно парадокс: придумайте такой воображаемый опыт, для которого теория квантовой механики двумя различными рассуждениями предсказывала бы два несогласующихся результата. В противном случае “парадокс” – это всего лишь конфликт между реальностью и вашим ощущением того, какой бы “ей надлежало быть”» (Р. Фейнман, 1965б, § 16.3).

## Литература

- Августин (St. Augustine) // Confessions 398. 11.23.30.  
 Алимов Ю.И. и Кравцов Ю.А. // УФН. 1992. Т. 162. С. 149.  
 Аспект (Aspect A.) // Nature. 1999. V. 398. P. 189.  
 Аспект и др. (Aspect A., Dalibard J. and Roger G.) // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 91. 1804.  
 Белл (Bell J.S.) // Physics. 1964. V. 1. P. 195.  
 Белл (Bell J.S.) // Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge Univ. Press. 1987.  
 Бирн (Byrne P.) 2007. // Sci. Am. Dec. 2007. P. 98. (Берн П. // В мире науки. 2008. Т. 3. С. 69.)  
 Блаттер (Blatter G.) // Nature. 2000. V. 406. P. 25.  
 Бом (Bohm D.) // Quantum Theory. NY.: Prentice-Hall. 1952. (Бом Д. // Квантовая теория. М.: Наука. 1965.)  
 Бор (Bohr N.) // Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 696. (Бор Н. // УФН. Т. 16. С. 446. 1936.)  
 Бор Н., 1971. // Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука. 1971.  
 Борн (M. Born) // Atomic Physics. London: Blackie and Son. 1963. (Борн М. // Атомная физика. М.: Мир. 1965.)  
 Брайда и др. (Brida G., et al.) // Phys. Lett. 2000. V. 268. P. 12.  
 Бруэр и Хан (Brewer R.G. and Hahn E.L.) // Sci. Am. Dec 1984. V. 251. №. 6. (Бруэр Р. и Хан Е. // В мире науки. 1985. Т. 2. С. 4.)  
 Вайнберг (Weinberg S.) // Dreams of a Final Theory. NY.: Random House. 1992. (С. Вайнберг // Мечты об окончательной теории. М.: УРСС. 2004.)  
 Вигнер (Wigner E.) // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 131. P. 1. (Вигнер Э. // УФН. 1968. Т. 94. С. 535.)  
 Герценштейн и Кравцов (Gertsenstein M.E. and Kravtsov Yu.A.) // JETP. 2000. V. 59. P. 658.  
 Дирак (P.A.M. Dirac) // The Principles of Quantum Mechanics. Oxford: Clarendon Pr. 1958. (П.А.М. Дирак // Принципы квантовой механики. М.: Физматлит. 1960.)  
 Заславский Г.М. // Стохастичность динамических систем. М.: Наука. 1984.  
 Заславский (G.M. Zaslavsky) // Physics Today. Aug 1999. P. 39.  
 Кадомцев Б.Б. // Динамика и информация. М.: Изд-во УФН. 1999. С. 67.  
 Кац (Kac M.) // Probabilities and Related Topics in Physical Sciences. London: Interscience Publ. 1957. (М. Кац // Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир. 1965.)  
 Клаузер и др. (Clauser I.F., Horne M.A., Shimony A., and Holt R.A.) // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 880.  
 Кравцов Ю.А. // УФН. 1989. Т. 158. С. 93.  
 Крылов Н.С. // Работы по обоснованию статистической физики. М.-Л.: АН СССР. 1950.  
 Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. // Квантовая механика. М.: Физматлит. 1963. § 14.



- Либовиц (Lebowitz J.) // *Physics Today*. Sep 1993. P. 32.
- Лихтенберг и Либерман (Lichtenberg A.J. and Lieberman M.A.) // *Regular and Stochastic Motion*. NY.: Springer. 1983. (А. Лихтенберг и М. Либерман // Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир. 1984.)
- Мандельштам Л.И. // Полное собрание трудов. Т. 5. М.: АН СССР. 1950. С. 385–389.
- Мермин (Mermin N.D.) // *Am. J. of Physics*. 1981. V. 9. P. 940.
- Пайс (Pais A.) // *The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford: Oxford Univ. Pr. 1982. (А. Пайс // Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. М.: Наука. 1989.)
- Паули (W. Pauli) // *Dialectica*. 1954. V. 8. P. 283. (В. Паули // Физические очерки. М.: Наука. 1975. С. 45–46.)
- Пулин (Poulin D.) // *A rough guide to quantum chaos*. Univ. of Waterloo. 2002.
- Салар и др. (Salart D., Baas A., Branciard C., Gisin N., and Zbinden H.) // *Testing Spooky Action at a Distance*. (arXiv:0808.3316v1 [quant-ph] 25 Aug 2008).
- Синай Я.Г. // *УМН*. 1970. Т. 25. С. 141.
- Теребиж В.Ю. // *УФН*. 1995. Т. 165. С. 143.
- Теребиж В.Ю. // *Введение в статистическую теорию обратных задач*. М.: Физматлит. 2005.
- Уленбек и Форд (Uhlenbeck G.E. and Ford G.W.) // *Lectures in Statistical Mechanics*. Providence: Am. Math. Soc. 1963. (Дж. Уленбек и Дж. Форд // Лекции по статистической механике. М.: Мир. 1965.)
- Фаддеев Л.Д. и Якубовский О.А. // *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков*. Изд. Ленинградского унив-та. 1980.
- Фейнман (Feynman R.P., Leighton, R.B. and Sands M.) // *The Feynman Lectures on Physics*. V. 2. Reading: Addison-Wesley. 1964. (Р. Фейнман, Р. Лейтон и М. Сэндс // Фейнмановские лекции по физике. Вып.6. М.: Мир. 1966.)
- Фейнман (Feynman R.P.) // *The Character of Physical Laws*. London: Cox and Wyman. 1965a. (Фейнман Р. // Характер физических законов. М.: Наука. 1987.)
- Фейнман (Feynman R.P., Leighton R.B., and Sands M.) // *The Feynman Lectures on Physics*. V. 3. Reading: Addison-Wesley. 1965b. (Фейнман Р., Лейтон Р. и Сэндс М. // Фейнмановские лекции по физике. Вып. 8, 9. М.: Мир. 1966. 1967.)
- Фейнман (Feynman R.P.) // *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton: Princeton Univ. Pr. 1985. (Фейнман Р. // КЭД – странная теория света и вещества. М.: Наука. 1988.)
- Фейнман (Feynman R.P., Morinigo F.B., and Wagner W.G.) // *Feynman Lectures on Gravitation*. Addison-Wesley. 1995. (Фейнман Р.Ф., Мориниго Ф.Б. и Вагнер У.Г. // Фейнмановские лекции по гравитации. М.: Янус-К. 2000.)
- Фок В.А. // *УФН*. 1936. Т. 16. С. 436.
- Фок В.А. // *УФН*. 1957. Т. 62. С. 461.
- Фридман А.А. // *Мир как пространство и время*. Второе изд. 1923. М.: Наука. 1965. С. 54.
- Фридман и Клаузер (Freedman S.I. and Clauser I.F.) // *Phys. Rev. Lett.* V. 28. P. 938. 1972.
- Хуанг (Huang K.) // *Statistical Mechanics*. NY: Wiley and Sons, 1963. (К. Хуанг // Статистическая механика. М.: Мир. 1966.)
- Чандрасекар (S. Chandrasekhar) // *Rev. Mod. Phys.* V. 15. N. 1. 1943. (С. Чандрасекар // Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ. 1947.)
- Чириков Б.В. // *Препринт ИЯФ СО АН СССР*. 1978. № 66.
- Шимони (Shimony A.) // *Sci. Am.* V. 258. № 1. Jan 1988. (Шимони А. // В мире науки. Т. 3. С. 22. 1988.)
- Шпольский Э.В. // *Атомная физика*. М.: Наука. 1974.
- Шустер (Schuster H.G.) // *Deterministic Chaos*. Weinheim Physik-Verlag. 1984. (Шустер Г. // Детерминированный хаос. М.: Мир. 1988.)
- Эйнштейн А. // *Собрание научных трудов*. Т. 3. М.: Наука. 1966. С. 181.
- Эйнштейн, Подольский и Розен (Einstein A., Podolsky B. and Rosen N.) // *Phys. Rev.* V. 47. P. 777. 1935. (Эйнштейн А. // Собрание научных трудов. Т. 3. М.: Наука. 1966. С. 604.)