Изв. Крымской Астрофиз. Обс. 108, № 1, 71–78 (2012)

ИЗВЕСТИЯ КРЫМСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

УДК 523.94

Отражение альвеновских волн и турбулизация плазмы в короне Солнца

Ю.Т. Цап

НИИ “Крымская астрофизическая обсерватория”, 98409, Украина, АР Крым, Научный
yur@crao.crimea.ua

Поступила в редакцию 26 августа 2011 г.

Аннотация. Рассматривается непрерывное отражение альвеновских волн в коронах Солнца и звезд. На основе ВКБ–приближения получено решение линейного волнового уравнения в случае стратифицированной изотермической атмосферы. Проведен критический анализ результатов Ферраро и Пламптона (1958), Холлвега (1972), а также соотношений в переменных Эльзассера. Показано, что в рамках принятой модели альвеновские возмущения не испытывают непрерывного отражения, а трансформируются в моды промежуточного типа, обладающие свойствами колебаний и бегущих волн. Обсуждается проблема турбулизации корональной плазмы. Происхождение распространяющихся к Солнцу альвеновских волн связывается с развитием параметрической неустойчивости.

THE ALFVÉN WAVE REFLECTION AND PLASMA TURBULIZATION IN THE SOLAR CORONA, *by Yu.T. Tsap.* The continuous reflection of Alfvén waves in the coronae of the Sun and stars is considered. Based on the WKB–approximation the solution of the linear wave equation in the case of the stratified isothermal atmosphere has been obtained. The critical analysis of results obtained by Ferraro and Plumpton (1958), Hollweg (1972), as well as the relations in the Elsasser variables has been made. It has been shown that Alfvén disturbances do not suffer the continuous reflection rather than they are transformed into the intermediate type modes possessed properties of vibrations and propagating waves. The problem of plasma turbulization is discussed. The origin of Sunward-propagating Alfvén waves is associated with the development of parametric instability.

Ключевые слова: корона, альвеновские волны, плазменная турбулентность

1 Введение

Проблема нагрева верхних слоев атмосфер Солнца и звезд, а также формирования высокоскоростных потоков солнечного и звездного ветров остается одной из наиболее актуальных и до сих пор нерешенных проблем современной астрофизики. К настоящему времени получено много указаний, свидетельствующих о связи этих явлений с волновыми процессами (Рознер и др., 1991; Кранмер, 2002, 2009). Вместе с тем вопрос о том, каким образом происходит передача механической энергии конвективных движений в верхние слои атмосферы по-прежнему остается открытым.

Отличительная черта альвеновских волн состоит в том, что они, распространяясь вдоль магнитных силовых линий, не сжимают плазму. Как следствие, их амплитуда с высотой растет гораздо медленнее чем, например, акустических мод, что минимизирует энергетические потери, вызванные нелинейными эффектами в нижних слоях атмосферы. Альвеновские волны не подвержены диссипативным процессам, возникающим из-за теплопроводности, радиационных потерь и объемной вязкости. Нет и ограничений по частоте, обусловленных силой плавучести (см., однако, Мусиелак, Мур, 1995; Муравски, Мусиелак, 2010). Поэтому неудивительно, что многие авторы рассматривают их как наиболее вероятный источник нагрева верхних слоев звездных атмосфер (Нараин, Ульмшнайдер, 1990, 1996; Кампос, Мендес, 1995; Гельфрейх и др., 2004; Кранмер, Баллегуен, 2005; Климчук, 2006; Цап, 2006). К тому же, благодаря комплексным наблюдениям Солнца в различных волновых диапазонах, проводимых с высоким пространственным и временным разрешением, за последнее время получено много указаний в пользу правомерности этой гипотезы (см., например, Де Понте и др., 2007; Джесс и др., 2009; Макинтош и др., 2011).

Низкочастотные альвеновские волны были обнаружены в солнечном ветре 40 лет назад Бэлчером и Дэвисом (1971). В дальнейшем с помощью одной из наиболее успешной и продолжительной космической миссии Ulysses (1990–2009 гг.) в области высокоширотного ветра удалось получить достаточно убедительные свидетельства о распространении этих мод в направлении Солнца (Бавассано и др., 2000). Поскольку генерация волн происходит в нижних слоях солнечной атмосферы, то природа данного явления требовала своего объяснения.

Важность изучения рассматриваемого вопроса еще более усилилась в свете проблемы медленной диссипации альвеновских мод в короне, что приводит к слабому нагреву плазмы. Так, сейчас активно обсуждается возможность быстрого затухания магнитных возмущений из-за развития турбулентного каскадного процесса, при котором происходит перекачка энергии от малых волновых чисел к большим посредством нелинейного взаимодействия (Ту, Марш, 1995; Вердини, Велли, 2007; Вердини и др., 2009; Чандран, Холлвег, 2009). Однако данный механизм может быть реализован лишь при условии, что взаимодействующие волны распространяются в противоположных направлениях (Ту, Марш, 1995; Туркмани, Торкелссон, 2003; Вердини, Велли, 2007; Вердини и др., 2009; Чандран, Холлвег, 2009).

В настоящее время считается, что направленные к Солнцу волны могут возникнуть либо вследствие их непрерывного отражения (Бел, Лерой, 1981; Кранмер, Баллегуен, 2005; Вердини и др., 2009), либо из-за параметрического распада альвеновских мод (Венцель, 1974; Туркмани, Торкелссон, 2003) в рамках механизма, предложенного Сагдеевым и Галеевым (1969). Какая из моделей является более адекватной – до сих пор не выяснено. Поэтому цель представленной работы состоит в том, чтобы попытаться найти дополнительные свидетельства в пользу доминирующей роли одного из механизмов.

В следующем разделе мы рассмотрим особенности отражения альвеновских волн в стратифицированной среде, акцентируя внимание на важности корректного учета граничных условий при решении волнового уравнения. Затем рассмотрим условия применимости переменных Эльзассера для описания непрерывного отражения альвеновских волн в случае неоднородной среды. В заключение обсудим результаты работы и приведем основные выводы.

2 Непрерывное отражение альвеновских волн в стратифицированной атмосфере

Если учесть силу тяжести и пренебречь диссипативными членами, то уравнения движения плазмы и магнитной индукции, используя стандартные обозначения, можно представить в виде

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} + \rho \mathbf{g};$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

В случае несжимаемой среды ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), когда направление распространения альвеновских волн совпадает с осью Z, полагая магнитное поле $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ и $B = \mathrm{const}$, комбинируя два последних уравнения после их линеаризации, для возмущенных компонент поперечной скорости $\delta\mathbf{v}$ и магнитного поля $\delta\mathbf{B}$ получим

$$\rho_0\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B}{4\pi}\frac{\partial\delta\mathbf{B}}{\partial z}; \quad \frac{\partial\delta\mathbf{B}}{\partial t} = B\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial z}. \tag{1}$$

Исключив $\delta\mathbf{B}$ в первом уравнении системы (1) с помощью второго, находим волновое уравнение альвеновских мод

$$\frac{\partial^2\delta v}{\partial t^2} = v_A^2(z)\frac{\partial^2\delta v}{\partial z^2}, \tag{2}$$

где $v_A(z) = B/\sqrt{4\pi\rho(z)}$ – скорость Альвена.

Для изотермической атмосферы, воспользовавшись барометрической формулой

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/H},$$

где H – характерная шкала высот, считая возмущения скорости гармоническими по времени, т. е. $\delta v \propto \exp(-i\omega t)$, из (2) имеем

$$\frac{\partial^2\delta v}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v_{A0}^2}e^{-z/H}\delta v = 0, \tag{3}$$

где $v_{A0} = B/\sqrt{4\pi\rho_0}$. Уравнение (3), описывающее линейные альвеновские возмущения скорости δv, и ляжет в основу нашего дальнейшего анализа.

Общее решение волнового уравнения

Полагая $v = y(\xi)$, где $\xi = \exp(-x/H)$, вместо (3) получим уравнение

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\xi} + \frac{\omega^2H^2}{v_{A0}^2}y = 0,$$

сводящееся к уравнению Бесселя, решение которого в общем случае можно представить в виде (Камке, 1971)

$$y = Z_0(\eta),$$

где $Z_0(\eta)$ – линейная комбинация цилиндрических функций нулевого порядка с аргументом $\eta = 2H\omega/v_A$. Следовательно, в условиях стратифицированной атмосферы альвеновские возмущения скорости

$$\delta v(z,t) = Z_0(\eta)e^{-i\omega t}. \tag{4}$$

Подчеркнем, что решение (4) не имеет каких-либо ограничений по частоте, поскольку альвеновские возмущения не подвержены действию силы плавучести. Этот вывод несколько противоречит результатам Мусиелака и Мура (1995) (см. также Муравски, Мусиелак, 2010), которые свели уравнения для возмущений скорости и магнитного поля (1) к соответствующим уравнениям Кляйна-Гордона, а затем Эйлера. Причем из-за наличия особенностей в волновом уравнении для δB они пришли к заключению о существовании “точек поворота” по частоте ω. По мнению авторов, в них происходит переход от осциллирующего решения к экспоненциальному, что эквивалентно сильному отражению альвеновских мод, если для падающей волны $\omega \to \omega_A(z) = v_A(z)/2H$. Поэтому процесс возникновения отраженных волн должен носить непрерывный характер, так как ввиду уменьшения плотности плазмы с высотой z значения $\omega_A(z)$ увеличиваются, и даже высокочастотные альвеновские волны рано или поздно должны отразиться.

На наш взгляд, изложенный выше подход является недостаточно обоснованным. Во-первых, математический метод, использованный Мусиелаком и Муром (1995), не только не безупречен (см. Велли, 1993), но и нет в нем необходимости, поскольку преобразование волнового уравнения (3) к уравнению Бесселя является наиболее простой процедурой, не требующей наложения каких-либо дополнительных условий. Во-вторых, как уже было отмечено, альвеновские возмущения не сжимают плазму, а значит, они не подвержены действию силы плавучести, ответственной за “отсечку” по частоте, как это имеет место для акустических мод.

ВКБ-приближение

Ищем решение уравнения (3) в виде

$$\delta v(z) = \exp\left[i\eta_0\sigma(z)\right], \quad \eta_0 = \frac{2H\omega}{v_{A0}}, \tag{5}$$

где $\sigma(z)$ – некоторая аналитическая функция. Разложим $\sigma(z)$ в ряд по малому параметру $1/i\eta_0$, т. е.

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{i\eta_0}\sigma_1 + \left(\frac{1}{i\eta_0}\right)^2\sigma_2 + ...$$

Подставив (5) в (3), приравнивая коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях $1/i\eta_0$, ограничившись первым порядком малости, получим

$$-\left(\frac{d\sigma_0}{dz}\right)^2 + \frac{1}{4H^2}e^{-z/H} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{d\sigma_0}{dz}\frac{d\sigma_1}{dz} + \frac{1}{2}\frac{d^2\sigma_0}{dz^2} = 0. \tag{7}$$

Следовательно, после интегрирования (6) и (7) находим

$$\sigma_0 = \mp\frac{v_{A0}}{v_A} + \mathrm{const}; \tag{8}$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\ln\frac{d\sigma_0}{dz} + \mathrm{const}. \tag{9}$$

Принимая во внимание (5), (8) и (9), решение уравнения (3), полученное в рамках ВКБ-приближения, можно представить в виде линейной комбинации

$$\delta v(z) = \frac{C_1}{\sqrt{\eta}}e^{-\eta} + \frac{C_2}{\sqrt{\eta}}e^{\eta}, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы, которые могут быть комплексными.

В предельном случае, когда $z \ll H$ (квазиоднородная среда), раскладывая в ряд экспоненциальную функцию

$$\exp(-z/H) \approx 1 - z/H,$$

вместо (10), как и следовало ожидать, приходим к уравнению, описывающему распространение плоских волн в противоположных направлениях

$$\delta v(z) = C_1e^{-ikz} + C_2e^{ikz}. \tag{11}$$

Особо подчеркнем, что использованное нами ВКБ–приближение можно считать оправданным, если $2H\omega/v_A \gg 1$ или период волн $T \ll 4\pi H/v_A$. Например, положив характерную шкалу высот $H = 200$ км, альвеновскую скорость $v_A = 100$ км/с, для солнечной хромосферы получим слишком малые значения $T \ll 25$ с (см., например, Гельфрейх и др., 2004). Между тем для солнечной короны период $T \ll 0.35$ ч, в то время как характерное время альвеновских флуктуаций может превышать десять часов (Бруно и др., 1985). Эти оценки свидетельствуют о необходимости привлечения более рафинированных подходов.

Решения Ферраро-Пламптона (1958) и Холлвега (1972)

Ферраро и Пламптон (1958) с учетом (4) решение волнового уравнения для возмущенной скорости (2) представили следующим образом

$$\delta v(z,t) = (C_1J_0(\eta) + C_2N_0(\eta))e^{-i\omega t}. \tag{12}$$

Откуда, поскольку $N_0(\eta) \to -\infty$ при $\eta \to 0$ ($\rho \to 0$), для полубесконечной атмосферы вместо (12) они приняли

$$\delta v(z,t) = C_2 J_0(\eta) e^{-i\omega t}. \tag{13}$$

Однако из решения (13) следует, что в коронах Солнца и звезд перенос энергии альвеновскими волнами не происходит. Действительно, усредненный по времени волновой поток

$$\mathbf{F}_A = -\frac{\mathbf{B}}{8\pi}\mathrm{Re}\{\delta \mathrm{v}^* \delta \mathrm{B}\}. \tag{14}$$

Тогда с помощью (1) и (12) из (14) получим

$$F_A = -\frac{B^2}{8\pi^2 \omega H}\mathrm{Im}\{\mathrm{C}_1^* \mathrm{C}_2\}. \tag{15}$$

Уравнение (15) предполагает, что $F_A \neq 0$ лишь в случае, когда коэффициенты C_1 и C_2 являются комплексными, отличными от нуля величинами. Следовательно, согласно (13), волновой поток альвеновских мод $F_A = 0$.

Интересно отметить, что Томас (1978) на основе решения (13) пришел к заключению о полном отражении альвеновских волн в верхней атмосфере Солнца (см. также Учида, Кабураки, 1974). В свою очередь, Ан и др. (1989) с целью обоснования этой гипотезы руководствовались тем, что $v_A \to \infty$ при $\rho \to 0$. В результате, они сделали парадоксальный вывод о конечном времени распространения альвеновских волн на бесконечно большие расстояния. Остановимся на этом “парадоксе” более обстоятельно.

Дисперсионное уравнение для альвеновских мод, полученное с учетом тока смещения, когда $\omega \ll \Omega_i$, где Ω_i – ионно-циклотронная частота, имеет вид (Александров и др., 1990)

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\pi\rho c^2/B^2}}.$$

Откуда видно, что при $\rho \to 0$ фазовая и групповая скорости не могут превышать скорость света c, поскольку в разреженной плазме альвеновские волны трансформируются в электромагнитные, а значит, “парадокс” Ана и др. (1989) скорее является надуманным.

На наш взгляд, основной недостаток подхода Ферраро и Пламптона (1958) связан с необоснованным игнорированием функцией Неймана $N_0(\eta)$ в правой части уравнения (12). Как легко видеть, несмотря на большие значения модуля $|N_0(\eta)|$ при малых плотностях ρ, всегда можно подобрать коэффициент C_2 таким, что величина $|C_2 N_0(\eta)|$ будет удовлетворять граничным условиям. Постоянная C_2 соответствует амплитуде волн в общепринятом смысле лишь в предельном случае квазиоднородной среды.

Холлвег (1972), в отличие от Ферраро и Пламптона (1958), обратил внимание на то, что решение волнового уравнения (3) можно представить в гораздо более прозрачной и наглядной форме

$$\delta v(z,t) = (C_1 H_0^{(1)}(\eta) + C_2 H_0^{(2)}(\eta))e^{-i\omega t}, \tag{16}$$

где $H_0^{(1)} = J_0(\eta) + iN_0(\eta)$ и $H_0^{(2)} = J_0(\eta) - iN_0(\eta)$ – функции Ханкеля соответственно первого и второго рода. Правомерность такого подхода, прежде всего, следует из анализа предельных случаев. Так, в асимптотике при $\eta >> 1$ (Ватсон, 1949)

$$H_0^{(1,2)}(\eta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}} e^{\pm i(\eta - \pi/4)}, \tag{17}$$

поэтому решение (16), как и следовало ожидать, сводится к выражению (10), полученному в рамках ВКБ–приближения, которое описывает суперпозицию волн, распространяющихся в противоположных направлениях. С другой стороны, в сильно неоднородной среде при $\eta << 1$ (Ватсон, 1949)

$$H_0^{(1,2)}(\eta) \approx \pm\frac{2i}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma\eta},$$

где $\gamma \approx 0.58$ — константа Эйлера, решение (16) свидетельствует о возбуждении нераспространяющихся мод.

Отметим также, что в общем случае с учетом (16) из (14) нетрудно получить выражение для волнового потока негармонических по пространству возмущений

$$F_A = \frac{B^2}{8\pi^2\omega H}(|C_2|^2 - |C_1|^2),$$

которое предполагает перенос энергии в противоположных направлениях соответствующими модами при любых значениях η.

Таким образом, в стратифицированной атмосфере падающие и отраженные волны хорошо описываются функциями Ханкеля первого и второго рода. Причем, как и в случае однородной среды, соответствующие решения — линейно независимы, т. е. никак не связаны между собой. Поэтому гипотеза о существовании непрерывного отражения волн, вообще говоря, ниоткуда не следует. В рассматриваемом случае более уместно говорить о возбуждении гармонических по времени альвеновских мод промежуточного типа, которые обладают свойствами бегущих и нераспространяющихся волн.

3 Переменные Эльзассера и отражение альвеновских волн

При описании каскадного процесса, ответственного за турбулизацию плазмы, довольно часто привлекают переменные Эльзассера (Эльзассер, 1950; Велли, 1993; Кранмер, Баллегуен, 2005; Вердини и др., 2009), поскольку лишь волны, распространяющиеся в противоположных направлениях способны эффективно взаимодействовать между собой. При этом считается, что данные переменные способны описывать отраженные волны не только в однородной, но и неоднородной плазме (см., например, Кранмер, Баллегуен, 2005). В последнем случае их происхождение априорно связывается с явлением непрерывного отражения в стратифицированной среде. Рассмотрим данный вопрос более детально, исходя из уравнений идеальной магнитной гидродинамики (1).

В пренебрежении силой тяжести, умножая левую и правую части второго уравнения из (1) на $1/\sqrt{4\pi\rho}$ и комбинируя его с первым, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta v \pm \frac{\delta B}{\sqrt{4\pi\rho}}\right) \mp v_A \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta v \pm \frac{\delta B}{\sqrt{4\pi\rho}}\right) = \frac{v_A}{2H}\frac{\delta B}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{18}$$

В переменных Эльзассера (1950)

$$\delta Z^{\pm} = \delta v \pm \frac{\delta B}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

которые в зависимости от знака соответствуют плоским волнам однородной среды, распространяющихся в противоположных направлениях (см., например, Велли, 1993), учитывая, что

$$\delta v = \frac{\delta Z^+ + \delta Z^-}{2}, \quad \delta B = \frac{\delta Z^+ - \delta Z^-}{2}\sqrt{4\pi\rho}, \tag{19}$$

вместо (18) получим уравнение

$$\frac{\partial \delta Z^{\pm}}{\partial t} \mp v_A \frac{\partial \delta Z^{\pm}}{\partial z} + \frac{v_A}{4H}(\delta Z^+ - \delta Z^-) = 0. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что в рамках сделанных предположений оно совпадает с хорошо известным выражением, приведенным в работе Велли (1993) (см. также Чандран, Холлвег, 2009).

По мнению некоторых авторов, (см., например, Кранмер, Баллегуен, 2005), последний член уравнения (20) описывает непрерывное отражение альвеновских волн, поскольку волны, распространяющиеся в разных направлениях, оказываются связанными между собой (см. на верхние индексы переменных Эльзассера в третьем члене левой части уравнения (20)). Между тем, на наш взгляд, этот вывод не имеет достаточных оснований, поскольку, несмотря на очевидные достоинства переменных Эльзассера при описании альвеновской турбулентности, их использование для сильно неоднородной плазмы нельзя считать обоснованным.

В самом деле, при $H \to 0$ уравнение (20) будет иметь решение, лишь когда $\delta Z^+ \to \delta Z^-$ (см. также Велли, 1993). Но, согласно (19), в этом случае возмущенное магнитное поле $\delta B \to 0$, что лишено физического смысла, поскольку альвеновские волны возникают под действием натяжения магнитных силовых линий. Поэтому применение переменных Эльзассера для описания отражения волн в стратифицированной среде может приводить к некорректным выводам.

В заключение этого раздела также отметим, что для квазиоднородной плазмы ($H \to \infty$) уравнение (19) сводится к виду

$$\frac{\partial \delta Z^{\pm}}{\partial t} \mp v_A \frac{\partial \delta Z^{\pm}}{\partial z} = 0.$$

Откуда следуют хорошо известные выражения для линейных возмущений альвеновских плоских волн ($\delta Z^{\pm} = A\exp(-i\omega t \mp ikz)$), а также их дисперсионное соотношение: $\omega = kv_A$.

4 Обсуждение результатов и выводы

В представленной работе мы провели детальный анализ распространения альвеновских волн в полубесконечной стратифицированной изотермической атмосфере. Полученные результаты свидетельствуют, что они не испытывают, как полагают некоторые авторы (см., например, Бел, Лерой, 1981; Кранмер, Баллегуен, 2005; Вердини и др., 2009), непрерывного отражения. Неоднородность плазмы приводит скорее к формированию волн промежуточного типа, которые обладают свойствами бегущих и нераспространяющихся волн и формально способны переносить волновую энергию при любых значениях собственной частоты. Это объясняется тем, что альвеновские моды, в отличие от акустических, не сжимают плазму, а значит, не подвержены действию силы плавучести.

Нами было показано, что полученное нами на основе ВКБ-приближения решение волнового уравнения альвеновских волн для стратифицированной среды хорошо согласуется с более общим выражением, предложенным ранее Холлвегом (1972). Тем самым было найдено еще одно указание в пользу несостоятельности подхода Ферраро и Пламптона (1958), которые сочли возможным пренебречь в решении волнового уравнения функцией Неймана для полубесконечной среды. Мы также нашли условия применимости ($2H\omega/v_A \gg 1$, $z \ll H$) приближения локального волнового числа $k(z)$, что не всегда принимается во внимание (см., например, Велли, 1993).

Согласно полученным результатам, наиболее вероятным источником корональных альвеновских волн, распространяющихся к Солнцу и тем самым обуславливающих турбулизацию плазмы в результате каскадного процесса, является не отражение, а их распад. В этом случае развивается параметрическая неустойчивость, при которой идущая снизу волна A генерирует альвеновскую волну, распространяющуюся в направлении Солнца A' в результате нелинейного взаимодействия, при котором $A \to A' + S$, где S — акустическая мода (Венцель, 1974; Туркмани, Торкелссон, 2003). Вместе с тем не следует исключать важную роль локальных корональных неоднородностей, для которых приближение стратифицированной изотермической атмосферы становится неприемлемым. Более детально этот вопрос мы надеемся рассмотреть в следующей работе.

Литература

Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. // Колебания и волны в плазменных средах. М: Изд. Московского университета. 1990.
Ан и др. (An C.-H., Musielak Z.E., Moore R.L., Suess S.T.) // Astrophys. J. 1989. V. 345. P. 597.
Бавассано и др. (Bavassano B., Pietropaolo E., Bruno R.) // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. P. 15959.
Бел, Лерой (Bel N., Leroy B.) // Astron. Astrophys. 1981. V. 104. P. 203.
Бруно и др. (Bruno R., Bavassano B., Villante U.) // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. P. 4373.
Бэлчер, Дэвис (Belcher J.W., Davis L.) // J. Geophys. Res. 1971. V. 79. P. 4174.
Ватсон Г.Н. // Теория бесселевых функций. М: Изд. иностранной литературы. 1949.

Велли (Velli M.) // Astron. Astrophys. 1993. V. 270. P. 304.
Венцель (Wentzel D.G.) // Solar Phys. 1974. V. 39. P. 129.
Вердини, Велли (Verdini A., Velli M.) // Astrophys. J. 2007. V. 662. P. 669.
Вердини и др. (Verdini A., Velli M., Buchlin E.) // Astrophys. J. 2009. V. 700. P. L39.
Гельфрейх Г.Б., Цап Ю.Т., Копылова Ю.Г. и др. // Письма в Астрон. журн. 2004. Т. 30. С. 540.
Джесс и др. (Jess D.B., Mathioudakis M., Erdelyi R., Crockett P. J., et al.) // Science. 2009. V. 323. P. 1582.
Де Понте и др. (De Pontieu B., McIntosh S.W., Carlsson M., et al.) // Science. 2007. V. 318. P. 1574.
Кампос, Мендес (Campos L.M.B.C., Mendes P.M.V.M.) // Mon. Mot. Roy. Astron. Soc. 1995. V. 276. P. 1041.
Камке Э. // Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1971.
Климчук (Klimchuk J.A.) // Solar Phys. 2006. V. 234. P. 41.
Кранмер (Cranmer S.R.) // Space Sci. Rev. 2002. V. 101. P. 229.
Кранмер, Баллегуен (Cranmer S.R., van Ballegooijen A.A.) // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2005. V. 156. P. 265.
Кранмер (Cranmer S.R.) // Astrophys. J. 2009. V. 706. P. 824.
Макинтош и лр. (McIntosh S.W., Kiefer K.K., Leamon R.J., et al.) // Nature. 2011. V. 475. P. 477.
Муравски, Мусиелак (Murawski K., Musielak Z.E.) // Astron. Astrophys. 2010. V. 518. P. A37.
Мусиелак, Мур (Musielak Z.E., Moore R.L.) // Astrophys. J. 1995. V. 452. P. 434.
Нараин, Ульмшнайдер (Narain U., Ulmschneider P.) // Space Sci. Rev. 1990. V. 54. P. 377.
Нараин, Ульмшнайдер (Narain U., Ulmschneider P.) // Space Sci. Rev. 1996. V. 75. P. 453.
Рознер и др. (Rosner R., An C.-H., Musielak Z.E., et al.) // Astrophys. J. 1991. V. 372. P. L91.
Сагдеев, Галеев (Sagdeev R.Z., Galeev A.A.) // Nonlinear Plasma Theory. Benjamin. New York. 1969.
Томас (Thomas J.H.) // Astrophys. J. 1978. V. 225. P. 275.
Ту, Марш (Tu C.-Y., Marsch E.) // Space Sci. Rev. 1995. V. 73. P. 1.
Туркмани, Торкелссон (Turkmani R., Torkelsson U.) // Astron. Astrophys. 2003. V. 409. P. 813.
Учида, Кабураки (Uchida Y., Kaburaki O.) // Solar Phys. 1974. V. 35. P. 451.
Ферраро, Пламптон (Ferraro V.C.A., Plumpton C.) // Astrophys. J. 1958. V. 127. P. 459.
Холлвег (Hollweg J.V.) // Cosmic Electrodynamics. 1972. V. 2. P. 423.
Цап (Tsap Yu.T.) // Proc. of the IAU Symp. 233 “Solar Activity and its Magnetic Origin”/ Eds Bothmer V., Hady A.A. Cambridge University Press. 2006. P. 253.
Чандран, Холлвег (Chandran B.D.G., Hollweg J.V.) // Astrophys. J. 2009. V. 707. P. 1659.
Эльзассер (Elsasser W.M.) // Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 183.