

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
КРЫМСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ
ОБСЕРВАТОРИИ

ТОМ I
Часть 2



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

Ответственный редактор
академик Г. А. Шайн

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВЫХ ШАРОВ И ЗВЕЗД

А. Б. Северный

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое изучение устойчивости и колебаний звезд и других космических масс имеет фундаментальное значение для понимания установившегося состояния большинства звезд и их распределения на диаграмме Герцшпрунга—Ресселя. Это изучение, можно надеяться, сыграет основную роль в объяснении существования перманентных, а также нерегулярных колебаний переменных звезд, явления новых звезд, образования и развития двойных и кратных систем и в других проблемах астрофизики и космогонии. Оно способно также дать сведения о химическом составе и способах образования энергии внутри звезд в устойчивом состоянии и внутри звезд, теряющих устойчивость.

Усилия большинства астрономов до сих пор были направлены на изучение вековой устойчивости звезд, выражающейся в затухании малых возмущений „звездного вещества“. Росселандом [1], Коулингом [2] и другими [3] были найдены условия затухания пульсаций звезды. Теория пульсаций была выдвинута Эддингтоном [4]. Однако устойчивость самого состояния равновесия звезды не изучена в должной мере и с должной строгостью. Риттер [5] рассматривал случай постоянной плотности, а Джинс [6] и Фогт [7] ограничивались случаем „гомологических“ движений, которые допустимы только в условиях нейтрального равновесия. Хорошо известный критерий для отношения удельных теплот получается обычно из энергетических соображений качественно или упрощенно, что оставляло сомнения в его применимости к реальным состояниям равновесия [8].

Впервые строгое исследование устойчивости равновесия отдельных газовых шаров Эмдена осуществил Толман [9], базируясь на принципе минимума полной потенциальной энергии. Его результат несколько позже был подтвержден в нашей работе [10], где та же проблема изучалась на основе теории малых колебаний, впервые примененной Джинсом в проблеме гравитационной неустойчивости туманностей [11]. Тогда же мы дали метод изучения устойчивости шаров Эмдена по

нерадиальным движениям [12] и несколько позже [13] дали оценку влияния вращения газового шара на его устойчивость, а также провели исследование устойчивости и колебаний газовых звезд [14].

В настоящей работе на основе звездной гидродинамики мы даем обобщение и развитие проблем устойчивости, которые были частично или ориентировочно рассмотрены в цитированных выше работах. Принятый нами с 1937 г. [15] метод исследования устойчивости по малым колебаниям с помощью вариационной теории фундаментальных чисел и теорем сравнения оказывается весьма эффективным в решении ряда проблем. Метод В. Ритца позволяет дать также количественную оценку результатов. Работа содержит общую постановку проблемы, исследование устойчивости, пульсаций и нерадиальных колебаний газовых шаров Эмдена. Рассмотрено влияние диссипативных агентов и медленного вращения на устойчивость газовых шаров. Проведены аналогичные исследования для невращающихся звезд, испытывающих радиальные возмущения, и рассмотрена вновь теория пульсирующих звезд. Получен ряд выводов, имеющих значение для астрофизики и космогонии.

Некоторые математические расчеты приведены в приложении, чтобы не загромождать текста.*

§ 1. О РАВНОВЕСИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ГАЗОВЫХ ШАРОВ

Очень протяженное облако газа, без вращения, может в мировом пространстве сгуститься в газовый шар, если взаимное притяжение газовых частиц преобладает над упругостью газа, возникающей от неупорядоченных движений частиц. Может ли такой шар достигнуть состояния равновесия и остаться надолго в этом состоянии? В своем классическом труде Р. Эмден [16] установил строение газовых шаров в равновесии при любой упругости газа. Исследования английских астрофизиков — Джинса, Эддингтона и Милна — показали значение труда Эмдена для науки о строении звезд и расширили представления о структуре газовых шаров в равновесии. Однако, было бы рискованно полагать, что все изученные до сих пор равновесные структуры соответствуют устойчивому равновесию. Сомнение исчезло бы, если мы были бы способны изучить характер движения газовых масс шара в близости к данному состоянию равновесия. Не обнаружив движений, уводящих в течение интересующих нас сроков шар из состояния равновесия в новые, отличные состояния, мы ответили бы утвердительно на поставленный вопрос (см. ниже).

Обратим внимание на некоторые стороны проблемы равновесия. Грубо говоря, потеря энергии и массы некоторым телом изменяется, как квадрат его размера. Энергия и масса внутри тела ме-

* Сноски на математическое приложение отмечаются в тексте буквой М.

няются, как куб его размера. Поэтому, переходя от обычных тел к космическим телам — огромного протяжения, естественно ожидать, что эти последние ближе к совершенно замкнутым системам, нежели обычные тела. Грандиозная потеря энергии звездой в окружающее пространство составляет все же ничтожнейшую долю запаса тепла в непрозрачных массах звезды. Это позволяет рассматривать приближенно состояние газов внутри звезд, как почти адиабатное (или — более широко — как политропное), когда, поднимаясь из глубин наружу, мы находим газовые слои в состояниях, изменяющихся по адиабате. В недрах звезд могут тогда присутствовать конвективные токи, перемещающие материю, и звезда сохраняет равновесие, если инерция движения этих токов не способна изменить положения уровней поверхностей. Благодаря низкой теплопроводности газов наблюдаемая у звезд потеря тепла в пространство будет в таком случае производиться конвективными токами. И возможно, что в ряде холодных звезд поздних классов эти токи — главный агент переноса тепла. Но у звезд с массой, большей массы нашего Солнца, важную и подчас основную роль в формировании равновесия и переносе тепла играет излучение (см. § 4). Рассмотрим несколько ближе конвективное равновесие звезд при низкой роли излучения. Возьмем в конвективном токе частицу с объемом единицы массы $v = \frac{1}{\rho}$ (ρ — плотность), движущуюся со скоростью v . Согласно первому принципу термодинамики для нее должно выполняться уравнение

$$\frac{DE}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} = v \frac{DQ}{Dt}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v, \text{grad}), \quad (1.1)$$

где E — внутренняя энергия на единицу массы, p — давление, а DQ/Dt — тепло, выделяемое или поглощаемое частицей [17]. Это тепло состоит из притока тепла благодаря лучистой и корпускулярной проводимости и теплоты внутреннего трения. Если пренебречь лучистой проводимостью, то мы получим преувеличенное представление о роли корпускулярной проводимости. Тогда уравнение энергии (1.1) сведется к уравнению теплопроводности, и если для простоты пренебречь кривизной слоев, то выравнивание температур в точках, удаленных на расстояние L друг от друга, протекает согласно хорошо известной формуле

$$T = \frac{1}{2} T_0 \left(1 \pm \int_0^{L/2 \sqrt{Dt}} e^{-x^2} dx \right), \quad D = \frac{\mu_0}{\rho},$$

где μ_0 — коэффициент вязкости. Заметное выравнивание, соответствующее, скажем, разнице на 1%, требует времени $\cong 2.50 \cdot 10^3 L^2/D$. Если конвективный ток имеет такое же сечение, как небольшая гранула (~ 200 км), то это время будет около 10^{11} лет; коэффициент вязкости

для звездной материи не ниже 0.1, а, вероятно, выше, и для Солнца $\mu_0 \cong 2$. Никакое резонное изменение числовых данных не меняет вывода о ничтожной роли теплопроводности в конвективном равновесии. Поэтому теплота DQ/Dt состоит фактически только из теплоты трения, скажем Φ , в отсутствии которой конвекция адиабатна и состояние газовой частицы изменяется по закону

$$p = K\rho^\gamma, \quad \gamma = c_p/c_v; \quad (1.2)$$

здесь γ — отношение удельных теплот. Но звезда, охваченная адиабатной конвекцией, не теряет тепла. Наблюдаемая потеря тепла у рассматриваемых звезд должна возникать благодаря взаимному торможению газов, которое непрерывно „обесценивает“ внутреннее тепло звезды у ее поверхности. Современное изучение солнечной грануляции, протуберанцев и спектральных кривых роста (плоской части) убеждает нас, что движения газов на поверхности звезд — турбулентные, но не ламинарные. Но это обстоятельство пока трудно учесть аналитически.

Пусть c — теплота, необходимая для изменения на 1° температуры T движущейся частицы, тогда правая сторона уравнения (1.1) есть $cv \frac{DT}{Dt}$. В реальной звезде c зависит от положения и скорости движения частицы, например, в обсуждаемом случае

$$c \frac{DT}{Dt} = v\Phi,$$

где теплота трения есть [18]

$$\Phi = -\frac{2}{3} \mu_0 (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \mu_0 \sum_{i,k} \frac{\partial v_i}{\partial k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial k} + \frac{\partial v_k}{\partial i} \right); \quad i, k = x, y, z. \quad (1.3)$$

Только для идеальной жидкости ($\mu_0 = 0$) или газов при очень низкой температуре будет справедлив закон (1.2). Но необходимы крайне искусственные условия движения, чтобы поддержать теплоемкость c неизменной через всю звезду, в частности, чтобы было $c = 0$. Поэтому политропные конвективные токи ($c = \text{const}$) внутри звезд едва ли правдоподобны.

Вообще для газовой массы при стационарной структуре ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) первый закон термодинамики (1.1) допускает движения, подчиненные уравнению

$$\left\{ (c_v - c) \frac{\partial \ln T}{\partial U} + (c_p - c_v) \frac{\partial \ln \rho}{\partial U} \right\} (\mathbf{v}, \operatorname{grad} U) = 0, \quad (1.4)$$

где U — гравитационный потенциал, если уровенные поверхности суть поверхности одинаковых температуры и плотности. Движения частиц через поверхности уровня $U = \text{const}$ при составляющей скорости $v_n \neq 0$ (n — нормаль) будут протекать по политропе, если только c неизмен-

но. Но наряду с этим возможны состояния массы, когда $v_n=0$ на всей поверхности уровня. В этом случае не существует вовсе потенциальных движений внутри газовой массы. Возможным вихревым движением здесь является вращение газов вокруг одной из главных осей эллипсоида инерции с угловой скоростью, зависящей только от расстояния от оси вращения (баротропное вращение).^{*} В частности, допустимо вращение массы, как твердого тела. Однако из условия (1.4) следует, что при баротропном вращении, как впервые показал Пуанкаре, возможны также политропные состояния массы (при $c=\text{const}$).

Интересующее нас конвективное равновесие газового шара без вращения управляется уравнением Пуассона

$$\frac{dg_0}{dr} + \frac{2}{r} g_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (1.5)$$

(g_0 — ускорение гравитации, r — расстояние от центра), при условии гидростатического равновесия

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dr} = -g_0. \quad (1.6)$$

Тогда уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dr} \right) = -4\pi G \rho_0 \quad (1.7)$$

определяет внутреннее строение шара при заданной „упругости“ газов γ , если принять грубый закон (1.2) (справедливый также для политропных состояний, когда $\gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c}$). Независимо от закона состояния газов, как хорошо известно, равновесие шара сохраняется при равномерном сжатии или расширении $r = \alpha r_1$, если изменения плотности давления и температуры следуют соотношениям $\rho_0 = \alpha^{-3} \rho_1$, $p_0 = \alpha^{-4} p_1$, $T_0 = \alpha^{-1} T_1$ (α — отношение начального и конечного радиусов шара a_0/a_1 [19]). Это есть простое следствие инвариантности уравнения (1.7) к этим преобразованиям гомологичности Лэна. Отсюда следует теорема Риттера: при гомологичных сокращениях материя газового шара следует политропе 4/3 (исключи α из равенств для ρ_0 и p_0).^{**} Однако

^{*} Действительно, при условии $v_n=0$ движение газов для стационарной массы происходит подобно течению несжимаемой жидкости ($\text{div } \mathbf{v}=0$). Этим двум условиям удовлетворяет баротропное вращение вокруг оси z , когда $v_x = -\omega(\tilde{\omega}) y$, $v_y = \omega(\tilde{\omega}) x$, $v_z=0$, а составляющие вихря суть $\xi=\eta=0$, а $\zeta=2\tilde{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{\omega}} + 2\omega$ ($\tilde{\omega}$ — расстояние от оси z).

^{**} Приблизненно $\gamma = R + f/f$, где R — газовая постоянная (~ 2 кал/град), а f — число степеней свободы. Тогда для роя метеорных частиц (6 степеней свободы на частицу) $\gamma=4/3$. Поэтому политропа 4/3 представляла большой интерес для космогонистов начала нашего столетия.

справедливо ли обратное, т. е. способны ли все газовые шары к гомологичным изменениям, будучи выведены из равновесия? Это решается ниже.

Допустим, что газовый шар выведен из равновесия, т. е. газовым массам сообщены некоторые перемещения и скорости, которые изменили распределение масс и положение поверхностей уровня. Для исследования устойчивости, как сказано выше, мы должны знать поведение массы, испытавшей подобное возмущение. Это поведение определяется пятью уравнениями: три уравнения движения Навье — Стокса, уравнение сплошности и уравнение энергии (1.1). При современном состоянии математики эти уравнения не допускают успешной трактовки, и всякий прогресс возможен только на пути, не зависящем от выполнимости точного решения этих уравнений. Здесь возможны два метода. Именно, мы можем основываться на изучении малых движений возле положения равновесия или базироваться на принципе Лагранжа о минимуме полной потенциальной энергии в устойчивом равновесии. Принятый нами первый метод не строгий, он оперирует лишь с членами первого порядка, включающими возмущения и их производные. С другой стороны, для сжимаемых газов вариационный принцип Лагранжа требует специального обоснования, подобного тому, которое дал Ляпунов [20] для несжимаемой жидкости. Такого обоснования нам дать не удалось, однако мы в конце этого параграфа докажем, что оба метода совершенно эквивалентны и ведут к одинаковым результатам.

Формулировка эйлеровых уравнений малого движения хорошо известна и дана рядом авторов. Мы обновим сейчас вывод этих уравнений в виде, полезном для дальнейшего исследования. На первое время будем пренебрегать рассеянием энергии благодаря вязкости и проводимости (адиабатное приближение). Указанное выше свойство замкнутости звезд позволяет принять, что малые возмущения вызывают лишь ничтожные отклонения от этого свойства. Картина малых движений не сильно искажается действием этих диссипативных агентов, которые вызывают лишь „вековое“ затухание движения (см. § 2). В этом случае

$$\frac{DQ}{Dt} = 0$$

и уравнение энергии (1.1) может быть записано в виде [21]:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{E} \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.8)$$

если использовать уравнение сплошности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.9)$$

Здесь $\mathcal{E}$ — энергия на единицу объема

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\gamma - 1} R_0 T = \frac{1}{\gamma - 1} p, \quad (1.10)$$

а v — скорость малых движений. Как сказано выше, подвижность конвективных токов внутри звезды в равновесии предполагается настолько малой, чтобы положение поверхностей уровня не изменялось со временем. Повидимому, скорость конвективных токов у поверхности Солнца не выше 2 км/сек, т. е. в 10 раз, по крайней мере, меньше скорости пульсации у звезд. Поэтому кажется возможным уяснить главные свойства малого движения без учета подвижности конвективных токов. Припишем индекс нуль всем величинам для равновесия и введем эйлеровы возмущения $\rho' = \rho - \rho_0$, $p' = p - p_0$ и т. д. Тогда уравнения движения

$$\frac{Dv}{Dt} = \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (1.11)$$

(U — потенциал гравитации) дают, очевидно, для малого движения такие уравнения:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \rho' \text{grad } U_0 + \rho_0 \text{grad } U' - \text{grad } p'. \quad (1.12)$$

Обозначив конденсацию через σ ($= \rho'/\rho_0$), возмущение потенциала найдем из уравнения Пуассона

$$\nabla^2 U' = -4\pi G \rho_0 \sigma, \quad (1.13)$$

а введя линейное смещение

$$s = \int v dt, \quad (1.14)$$

возмущения плотности и давления найдем из уравнений сплошности (1.9) и уравнения энергии (1.8) соответственно. Именно

$$\rho' = -\text{div } \rho_0 s, \quad (1.15)$$

$$p' = -\gamma p_0 \text{div } s - (s, \text{grad } p_0), \quad (1.16)$$

если учесть, что возмущение энергии определяется равенством (1.10). Если возможные процессы диссоциации и ионизации внутри нечувствительны к малым адиабатным возмущениям, то в отсутствии излучения естественно пренебрегать колебанием отношения удельных теплот γ , зависящего только от химического состава. В этом случае $\text{grad } p_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \text{grad } \rho_0$, где γ имеет то же значение, что и в законе (1.2), и возмущение давления (1.16) дается простой формулой

$$p' = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho', \quad (1.17)$$

которая также непосредственно следует из (1.2). Однако, для движений, протекающих по произвольной адиабате, справедливо уравнение (1.16), но не (1.17) (см. ниже, конец § 2*). Малые движения, протекающие вдоль равновесной адиабаты, управляются уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{grad } \chi, \quad (1.18)$$

где χ — возмущение полной потенциальной энергии

$$\chi = U' - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \sigma, \quad (1.19)$$

как это легко видеть из (1.12), (1.17) и условия равновесия, т. е. такие движения являются потенциальными. Уравнения (1.12) [или (1.18)], (1.13), (1.15) и (1.16) [или (1.17)] суть основные эйлеровы уравнения проблемы малых адиабатных движений вдоль равновесной адиабаты. Благодаря сферическому распределению масс в равновесии целесообразно рассматривать малые движения в сферических координатах. Составляющие смещения здесь будут, скажем, $u, rv, r\omega \sin \theta$, где u, v, ω — изменения полярных координат. Тогда уравнения движения (1.18) дают следующие важные уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \nabla^2 \chi, \quad (1.21)$$

где Δ — объемное расширение — согласно уравнению сплошности (1.15) есть

$$\Delta = \text{div } \mathbf{s} = -\sigma - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} u. \quad (1.22)$$

Равенства (1.13) и (1.19) показывают, что эти два уравнения (1.20) и (1.21) эквивалентны следующему одному уравнению для конденсации;

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 4\pi G \rho_0 \sigma + \nabla^2 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \sigma - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (1.23)$$

установленному нами ранее,** где оно исследовалось при упрощениях, которые оставляли желать лучшего. Для однородной среды

* В этом случае вместо уравнения (1.17) будем иметь

$$p' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' + (\gamma - \gamma_0) \frac{p_0}{\rho_0} (\mathbf{s}, \text{grad } \rho_0),$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, а γ_0 есть показатель в законе (1.2), $\gamma_0 = (c_p/c_v)_0$ [или $\gamma_0 = \left(\frac{c_p - c}{c_v - c}\right)_0$ в случае политропного равновесия].

** „О теории гравитационной неустойчивости“ [22] — цитируем как 1.

$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} = 0\right)$ это уравнение переходит в исходное уравнение теории гравитационной неустойчивости Джинса [23]. В случае безграничной среды оно дает систему гравитационных волн сжатия, которые разрушаются и образуют ядра конденсации, если длина волны превышает критическую длину Λ_0 , именно

$$\lambda > \Lambda_0 = q_l \left[\frac{\gamma p_0 / \rho_0}{4\pi G \rho_0} \right]^{1/2}; \quad (1.24)$$

здесь q_l есть корень уравнения $J_{l+1/2}(x) = 0$, $J_{l+1/2}$ — бесселева функция порядка $l + 1/2$. Волны с длиной $\lambda < \Lambda_0$ распространяются подобно звуковым волнам. Этот результат не зависит от выбора волновых поверхностей (за исключением небольшого изменения чисел q), равно как от случайных колебаний в распределении плотности. Он остается справедливым и в среде с очень медленным регулярным изменением плотности. Эта неустойчивость весьма протяженной среды, как известно, лежит в основе концепции Джинса о рождении звезд и планетных систем.

Малые движения в неоднородных газовых шарах можно рассматривать как наложение множества сферически-гармонических вибраций вида $S_l(\theta, \varphi) e^{ik_l t}$, т. е.

$$\sum_l f_l(r) S_l(\theta, \varphi) e^{ik_l t}, \quad (1.25)$$

где $f_l(r)$ — амплитуды простых гармоник, а k_l — параметры (фундаментальные частоты). Такое решение, конечно, непрерывно и однозначно на поверхности сферы r . В этом случае все возмущения становятся сферически-гармонического типа (1.25), и каждому l соответствует простое стоячее колебание с узловыми поверхностями, проходящими внутри шара. Амплитуды простых гармоник $f_l(r)$ мы получаем благодаря свойству ортогональности гармоник S_l , если подставим разложение возмущений вида (1.25) в основные уравнения. Это ведет к последовательности одинаковых уравнений для амплитуд f_l и содержащих параметры k_l . Результат будет тот же, как если бы мы оперировали с отдельной гармонической вибрацией. Поэтому положим просто

$$u = A_l S_l e^{ik_l t}, \quad \sigma = B_l' S_l e^{ik_l t}. \quad (1.26)$$

Тогда дилатация будет

$$\Delta = - \left(B_l' + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} A_l \right) S_l e^{ik_l t} \equiv B_l S_l e^{ik_l t}, \quad (1.27)$$

согласно (1.22). Возмущение потенциала U' составляется из объемного перераспределения масс внутри сферы и потенциала, возникающего от поверхностного неравенства толщины u (a), нанесенного на поверх-

ность шара радиуса $r=a$. Это последнее привнесение исчезает для шаров с граничной плотностью, равной нулю. Так как возмущение плотности сферически-гармонического типа, то согласно хорошо известной формуле [24]:

$$U_l' = \frac{4\pi G}{2l+1} \left\{ \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^r \rho_0 B_l' r^{l+2} dr + r^l \int_r^a \rho_0 B_l' \frac{dr}{r^{l-1}} + r^l \left[\rho_0 \frac{A_l(r)}{r^{l-1}} \right]_{r=a} \right\} S_l e^{ik_l t} \equiv U_{0l} S_l e^{ik_l t}. \quad (1.28)$$

Наконец, возмущение полного потенциала (1.19) будет

$$\chi = \left(U_{0l} - \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} B_l' \right) S_l e^{ik_l t} \equiv C_l S_l e^{ik_l t}. \quad (1.29)$$

Теперь легко находятся уравнения для амплитуд A , B и C . Используя уравнение Пуассона (1.13) и уравнения (1.19), (1.21), (1.26), (1.29), находим (опуская значок l)

$$\frac{1}{S e^{ikt}} \nabla^2 \chi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dC}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} C = -4\pi G \rho_0 B' - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} B' \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} B' = k^2 \left(B' + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} A \right), \quad (1.30)$$

в то время как уравнения (1.20), (1.21) дают

$$-k^2 A = \frac{dC}{dr}. \quad (1.31)$$

Система трех уравнений (1.30), (1.31) позволяет найти три амплитуды A , B' и C при граничных условиях в центре и на поверхности шара. Эта система эквивалентна одному уравнению 4-го порядка (см. § 4 и М, § 5).

Случай малых пульсаций, $l=0$, требует специального рассмотрения и представляет значительный интерес для теории пульсирующих звезд, основы которой заложены Эддингтоном (§ 5). Здесь возможно понизить порядок уравнения на 2 и привести систему (1.30), (1.31) к такому уравнению для амплитуды пульсации:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \gamma \frac{\rho_0}{2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) \right\} + 4\pi G \rho_0 A = -k^2 A. \quad (1.32)$$

Следует подчеркнуть, что это уравнение или ему эквивалентное (данное Росселандом [25])

$$\frac{d}{dr} \left\{ \gamma \rho_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A) \right\} + \frac{4}{r} g_0 \rho_0 A = -k^2 \rho_0 A, \quad (1.33)$$

остаётся справедливым также для пульсаций, протекающих по произвольной адиабате, когда возмущения давления даны формулой (1.16), но не (1.17). (Вывод этих уравнений см. в М, § 1.)

Граничные условия, которым должны удовлетворять все решения, очевидно, таковы, что возмущения конечны в центре, а давление на свободной поверхности сохраняется постоянным и равным давлению на границе шара $r=a$ в равновесии, т. е. $p(a+u_a)=p_0(a)$, где u_a — радиальное смещение при $r=a$. Форма свободной поверхности фиксируется условием, что всякое движение на этой поверхности полностью тангенциальное. Так как возмущения, отнесенные к свободной поверхности, отличаются от тех же, отнесенных к сфере $r=a$, на величины порядка квадрата смещения u_a , то

$$\text{при } r=a, \quad p_1 \equiv p' - g_0 \rho_0 u_a = 0, \quad (1.34)$$

т. е. возмущение давления уравнивается весом неравенства с высотой u_a в каждой точке сферы $r=a$. Это условие согласно (1.16) выражает, что дилатация Δ исчезает, если к границе приложено внешнее давление. Но на границе звезды давление исчезает, и дилатация отлична от нуля. Например, для радиальных движений уравнение (1.33) в силу условия равновесия (1.6) будет [26]

$$\frac{d}{dp_0} \left\{ \gamma p_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A) \right\} = \left(\frac{4}{r} + \frac{k^2}{g_0} \right) A,$$

откуда при $p_0=0$ на границе получаем граничное условие для амплитуды

$$\frac{dA}{dr} + \left\{ \frac{2}{r} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{4}{r} + \frac{k^2}{g_0} \right) \right\} A = 0. \quad (1.35)$$

Однако дальнейшее справедливо при более общем условии, что возмущения конечны при $r=a$, но не связаны линейными соотношениями типа (1.35).

Решив поставленную краевую задачу, т. е. определив амплитуды и „частоты“ возмущений, мы заключаем об устойчивости, если реальная часть всякого числа k не положительна для любой вибрации l ; если реальная часть хотя бы одного из чисел k положительна, мы заключаем о неустойчивости равновесия в целом. Такова процедура изучения устойчивости по малым колебаниям.

Будем теперь, согласно Толману [9], исходить из принципа минимума. Полная потенциальная энергия U шара в равновесии есть

$$U = U_{\text{grav}} + U_{\text{mech}} = \int_0^a \left(um' - \frac{Gmm'}{r} \right) dr,$$

где u — энергия от сил упругости на единицу массы, $u = \int_0^{\rho} p d\rho / \rho^2$, а m

есть масса, заключенная в сфере r , $m' = \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ (взяты обозначения Толмана). Первая вариация U есть функционал

$$\delta U(m) = \int_0^a \left(F_m - \frac{d}{dm} F_{m'} \right) \delta m dr,$$

где буквой F обозначена величина под интегралом в выражении U , а F_m , $F_{m'}$ — ее частные производные. Необходимое условие равновесия шара, $\delta U = 0$, есть $F_m = \frac{d}{dm} F_{m'}$ или, как легко видеть, это есть уравнение (1.6). Но U действительно достигает минимума в равновесии, если наименьшее характеристическое значение функционала

$$\delta^2 U(m) = \int_0^a (P \delta m^2 + R \delta m'^2) dr$$

положительно. Простое вычисление показывает, что здесь

$$P = \frac{1}{2} \left(F_{mm} - \frac{d}{dr} F_{m'm'} \right) = -\frac{1}{r^2}, \quad R = \frac{1}{2} F_{m'm'} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \gamma \frac{p}{r}.$$

Для структуры шара $m(r)$, реализующей минимум энергии, при условии нормировки, скажем,

$$\int_0^a \frac{\delta m^2}{4\pi r^2 \rho} dr = 1,$$

должно выполняться условие

$$\delta \left\{ \delta^2 U(m) - \lambda \int_0^a \frac{\delta m^2}{4\pi r^2 \rho} dr \right\} = 0,$$

где λ — множитель Эйлера, т. е. должно выполняться уравнение Эйлера для этой структуры

$$\frac{d}{dr} \{ R \delta m' \} - \left\{ P - \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \lambda \right\} \delta m = 0.$$

Если заметить, что $\delta m = 4\pi r^2 \rho A$, и использовать выше написанные выражения P и R , то это уравнение есть уравнение пульсаций (1.32), где $k^2 = \lambda$. Поэтому

$$\text{наим. } k^2 = \min \delta^2 U, \quad (1.36)$$

и если наименьшее характеристическое число k^2 краевой задачи о пульсациях положительно, т. е. шар устойчив по малым движениям, то полная энергия U достигает минимума в равновесии (шар устойчив согласно вариационному принципу динамики), и наоборот. Следовательно, оба метода — Толмана и наш — полностью эквивалентны. Это

вполне естественно, так как оба метода оперируют с членами только первого порядка. Но это ограничение не нарушает строгости анализа для непрерывных функционалов, а функционалы $U(m)$ являются таковыми.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ГАЗОВЫХ ШАРОВ ЭМДЕНА

Воспроизведем здесь некоторые известные свойства адиабатных шаров в равновесии. Отношение удельных теплот γ_0 шара в равновесии заменим „политропным“ индексом n и введем безразмерные переменные ξ, θ Эмдена так:

$$r = \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G} \lambda^{\frac{1-n}{n}} \right]^{1/2} \xi, \quad \rho_0 = \lambda \theta^n, \quad p_0 = K \lambda^{\frac{n+1}{n}} \theta^{n+1}, \quad n = \frac{1}{\gamma_0 - 1}, \quad (2.1)$$

λ есть пока произвольный параметр. Тогда строение шара с законом состояния газов (1.2) будет управляться уравнением (1.7), которое после подстановок (2.1) становится уравнением Эмдена для функции $\theta(\xi)$

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n. \quad (2.2)$$

Масса, содержащаяся в сфере радиуса r , будет

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_0 dr = 4\pi \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right]^{3/2} \lambda^{\frac{3-n}{n}} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right), \quad (2.3)$$

как это следует из (2.1) и (2.2).

Задача о структуре шара в равновесии заключается в решении уравнения (2.2) при некоторых граничных условиях. Эмден решает ее, отправляясь от центра, принимая известными плотность и температуру в центре шара, ρ_c и T_c , с данным n . Тогда плотность достигает наибольшего значения в центре и граничное условие следует взять

$$\text{при } \xi=0, \quad \frac{d\theta}{d\xi}=0, \quad \theta=1. \quad (2.4)$$

Это условие фиксирует параметры λ и K , именно: $\lambda = \rho_c$, а

$$K = \frac{R}{\mu} \rho_c^{-1/n} T_c \quad (2.5)$$

для идеальных газов. Решение уравнения (2.2) при условии (2.4) существует и является единственным для каждой политропы n . Это решение называется E -решением: оно представляет распределение плотностей, которое при любом n (кроме $n=0$, где плотность неиз-

менна) монотонно убывает от значения в центре ρ_c до тех пор, пока не исчезнет на некотором расстоянии $\xi = \xi_0$, фиксируя здесь границу шара.* Начиная с шара $n=5$, где плотность меняется по закону Шустера

$$\theta = \sqrt{\frac{3}{3 + \xi^2}}, \quad (2.6)$$

шары Эмдена ($n \geq 5$) безграничны. Решения уравнения (2.2) для разных n , полученные числовой интеграцией, приведены на рис. 1, взятом из монографии Эмдена [16].

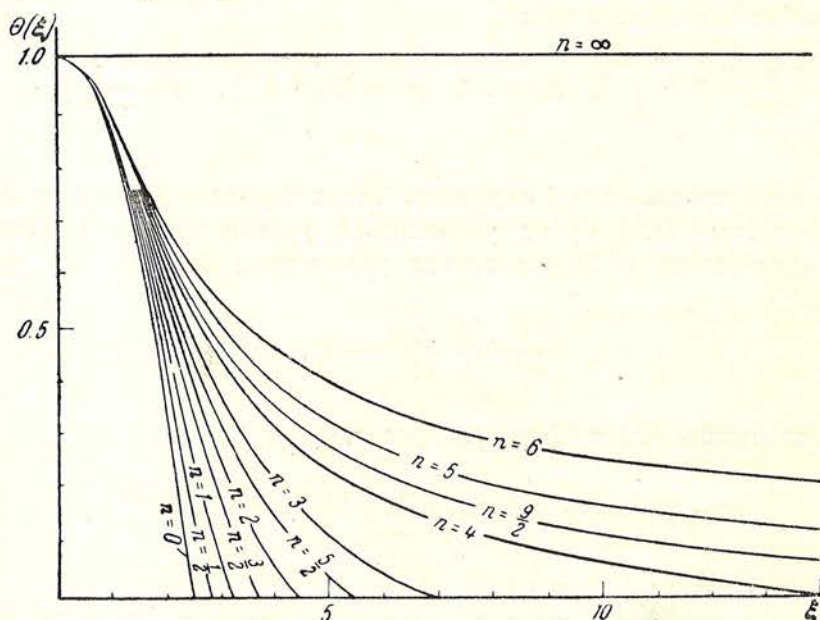


Рис. 1. Решения уравнения Эмдена

Итак, при данных одновременно ρ_c , T_c , масса M и радиус a шара однозначно определяются равенствами (2.1) (первое) и (2.3), где взято $\xi = \xi_0$. Исключим K и λ из этих равенств, тогда найдем

$$\lambda(=\rho_c) = \left(-\frac{1}{3} \frac{\xi}{\theta'} \right)_0 \frac{M}{\frac{4}{3} \pi a^3} \equiv \omega_1(n) \rho_m. \quad (2.7)$$

* Как легко вывести из уравнения (2.2), в центре шара функция Эмдена допускает представление

$$\text{при } \xi \rightarrow 0 \quad \theta = 1 - \frac{1}{6} \xi^2 + \frac{n}{120} \xi^4 - \dots, \quad (a)$$

тогда как

$$\text{при } \xi \rightarrow \xi_0 \quad \theta = -\theta_0' (\xi_0 - \xi) \left\{ 1 - \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{\xi_0^2} - \dots \right\}. \quad (b)$$

$$K = \frac{4\pi G}{n+1} \xi_0^{\frac{n-3}{n}} [4\pi\omega]^{\frac{1-n}{n}} a^{\frac{3-n}{n}} M^{\frac{n-1}{n}}, \quad \omega \equiv (-\xi^2\theta')_0. \quad (2.8)$$

Следовательно, обратно, если одновременно заданы масса и радиус шара, то плотность и температура в центре шара однозначно определяются этими равенствами [см. условие (2.5)]. Для каждого n мы получаем столько равновесных газовых шаров одинакового строения, сколько возможно различных комбинаций значений массы и радиуса; все эти шары отличаются друг от друга только значениями плотности и температуры в центре. По мере изменения n мы переходим от однородной несжимаемой сферы ($n=0$) к изотермическому шару бесконечной сжимаемости ($n=\infty$). Это сопровождается увеличением концентрации массы к центру (ω_1 — растет), которая становится бесконечной при $n=5$ („физическая“ модель Роша, для которой почти вся масса собрана в центре).

Равновесие изотермического шара $n=\infty$ требует особого рассмотрения. Вместо (2.1) здесь подстановки

$$r = [K/4\pi G\lambda]^{1/2} \xi, \quad \rho = \lambda e^{-\psi}, \quad p = K\lambda e^{-\psi} \quad (2.9)$$

ведут к уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} = e^{-\psi}, \quad (2.10)$$

причем $K=RT$, а $\lambda=\rho_c$ для идеальных газов. Распределение плотностей в этом случае аналогично случаям $n \geq 5$, и на больших расстояниях от центра шара плотность убывает, как $1/\xi^2$.*

Наконец, при $n > 3$, как легко убедиться путем простой подстановки, уравнение Эмдена имеет такой частный (особый) интеграл

$$\theta = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{1/n-1} \frac{1}{\xi^{2/n-1}}, \quad (2.11)$$

который возникает из-за особенности при члене с θ' . Ему соответствует шар с бесконечной массой, в котором плотность монотонно падает с удалением от центра и неограниченно растет при приближении к нему. Этот интеграл для изотермического шара есть

$$\psi = -\ln \frac{2}{\xi^2}, \quad (2.12)$$

* Точнее,

$$\text{при } \xi \rightarrow \infty, \quad -\psi = \ln \frac{2}{\xi^2} + O\left(\frac{1}{V\xi}\right), \quad (e)$$

в то время как

$$\text{при } \xi \rightarrow 0, \quad \psi = \frac{1}{6} \xi^2 - \frac{1}{120} \xi^4 - \frac{1}{1890} \xi^6 - \dots \quad (d)$$

которому соответствует закон плотностей

$$\rho_0 = \frac{RT}{2\pi G} \frac{1}{r^2}. \quad (2.13)$$

Такое распределение масс всегда образуется при равномерном истечении вещества из точки $r=0$, как из источника. По мере уменьшения n падение плотности становится все более быстрым и для политропы, близкой к $n=3$, плотность убывает почти по закону $\rho \sim 1/r^3$. Подобное изменение плотности, повидимому, характерно для протяженных оболочек некоторых звезд.

Однако возможна другая формулировка проблемы равновесия. Считая заданными массу и радиус, Милн ищет структуру шара, отправляясь от его границы [27]. Полагая на границе (где $\theta=0$) число $\xi=1$, мы фиксируем параметр λ условием

$$\lambda = \left[\frac{4\pi G a^2}{K(n+1)} \right]^{\frac{n}{1-n}}, \quad (2.14)$$

причем мы не делаем никаких предположений о внутреннем строении шара, ведущих к специальному выбору параметра K . Предполагается, что K и n задаются физическими и химическими свойствами газов. Тогда равенство (2.8) фиксирует начальное значение $\frac{d\theta}{d\xi} = \omega$ ($\xi_0=1$) и ищется решение уравнения Эмдена (2.2), удовлетворяющее условиям

$$\text{при } \xi=1, \theta=0, \frac{d\theta}{d\xi} = \omega. \quad (2.15)$$

Для данной политропы (n и K заданы наперед) уравнение Эмдена имеет здесь столько решений, сколько существует комбинаций значений массы и радиуса, дающих согласно (2.8) различные числа ω . Тогда, согласно исследованиям Милна и Фаулера [28], только те шары суть шары Эмдена, у которых комбинации значений M и a дают в уравнении (2.8) число $\omega = \omega_0$ ($=2.018$ для $n=3$, например). Для этих

шаров $a \sim M^{\frac{1-n}{3-n}}$. Шары той же политропы, для которых комбинации (M, a) производят в уравнении (2.8) числа $\omega < \omega_0$, обладают плотностью, монотонно и неограниченно возрастающей к центру (M -решения). У шаров с $\omega > \omega_0$ плотность колеблется, проходя внутри шара через нулевое значение, и тем сильнее и чаще, чем ближе к центру шара (F -решения). Таким образом, если, по Эмдену, шар при данных (M, a) может иметь только E -строение, то, по Милну, шар может иметь также M -или F -строение, смотря по тому, каково число K . Анализ Милна, тем самым, расширяет класс конфигураций равновесия шара при данных (M, a).

Если газовый шар при заданной массе испытал сжатие или расширение, то он может или превратиться в шар особого M -или F -строе-

ния, или остаться шаром Эмдена, но уже вступившим на другую политропу, с другими числами n и K . * Но при малом изменении объема шара едва ли свойства газов могут столь быстро изменяться, чтобы шар перешел на другую политропу n и K . Поэтому, по мнению Милна, шары Эмдена неустойчивы, они переходят в особые M -или F -шары при малейшем изменении размеров (кроме случая гомологичных сокращений политропного шара $n=3$). Однако такое мнение требует проверки, т. е. исследования устойчивости шаров Эмдена относительно малых изменений структуры, протекающих вдоль той же политропы n и K . Это исследование составляет предмет настоящего параграфа. Аналитические трудности не позволили провести такое же исследование для M - и F -структур. Поэтому пока нет оснований ни отвергать эти решения, ни принять их для устойчивых состояний газового шара. Если они действительно дают устойчивый шар, то это будет указывать на нарушение обычных газовых законов в центральных частях звезды, согласно справедливому заключению Милна.

Задача об устойчивости и пульсациях газовых шаров возле состояния гравитационного равновесия сводится к краевой задаче Штурма — Лиувилля о нахождении характеристических чисел и характеристических функций уравнения пульсаций (1.33) при поставленных в § 1 граничных условиях. Физически речь идет о тяжелых стоячих волнах сжатия в неоднородной сжимаемой сфере. Специфика математической задачи заключается в наличии особенностей на границах области интеграции, возникающей от употребления полярной системы координат и исчезания плотности на внешней границе. С помощью прямых методов вариационного исчисления мы показываем, что существует последовательность неубывающих реальных характеристических чисел, для которых реализуются единственные решения поставленной задачи (характеристические функции), удовлетворяющие условиям ортогональности и нормализации. Это рассмотрение дано в приложении М, § 2. Такие свойства математической проблемы позволяют нам в полном объеме применить теорию характеристических чисел Куранта для изучения устойчивости по знаку наименьшего из этих чисел, называемого „запасом устойчивости“. Эффективность этой теории для проблемы гравитационной неустойчивости космических тел обнаружена нами впервые в 1938 г. и подтверждена во всех последующих работах.

Переходя к анализу, мы введем в уравнение пульсаций (1.33) переменные ξ, θ Эмдена посредством равенств (2.1) и вместо амплитуды пульсаций A введем безразмерную функцию

$$v \propto \xi \theta^{\frac{n+1}{2}} A. \quad (2.16)$$

* Именно такими значениями n и K , что при новом значении a (M остается то же) формула (2.8) даст опять значение $\omega = \omega_0$, реализующее E -строение.

Тогда, считая, что возмущения протекают вдоль равновесной политропы $\gamma_0 = 1 + \frac{1}{n}$, после некоторых преобразований получим уравнение

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} - qv + \lambda \frac{1}{\theta} v = 0, \quad (2.17)$$

где

$$\lambda = \frac{nk^2}{4\pi G \rho_c}, \quad (2.18)$$

а коэффициент

$$q = \frac{2}{\xi^2} - 2(n-1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right) + \frac{n^2-1}{4} \frac{\theta'^2}{\theta^2} - \frac{n+1}{2} \theta^{n-1}, \quad (2.19)$$

причем функция v для E -структуры газового шара удовлетворяет очевидным условиям

$$v(0) = v(\xi_0) = 0. \quad (2.20)$$

Краевая задача (2.17), (2.20), как известно, эквивалентна вариационной проблеме минимума функционала

$$D[v] = \int_0^{\xi_0} (v'^2 + qv^2) d\xi \quad (2.21)$$

с условиями (2.20) и условием нормализации

$$H[v] = \int_0^{\xi_0} \frac{1}{\theta} v^2 d\xi. \quad (2.22)$$

Необходимое и достаточное условие для квадратического функционала (2.21) быть положительным требует, чтобы решения уравнения Якоби

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} - qv = 0, \quad (2.23)$$

удовлетворяющие условию $v(0) = 0$, не осциллировали в закрытом интервале $(0, \xi_0)$ [29]. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v_1 = \xi^{2\theta^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (2.24)$$

которая осциллирует точно в $(0, \xi_0)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 v_1}{d\xi^2} - q^* v_1 = 0, \quad (2.25)$$

где

$$q^* = \frac{2}{\xi^2} - (n+1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right) + \frac{n^2-1}{4} \frac{\theta'^2}{\theta^2} - \frac{n+1}{2} \theta^{n-1}. \quad (2.26)$$

$$q - q^* = (3 - n) \left(-\frac{0'}{\xi_0} \right). \quad (2.27)$$

положительна для всякого шара Эмдена $n < 3$, и по теореме сравнения Штурма [30] всякое решение уравнения Якоби (2.23) осциллирует медленнее в интервале $(0, \xi_0)$, нежели функция v_1 (2.24), т. е. при $n < 3$ не существует осциллирующих в $(0, \xi_0)$ решений этого уравнения. Поэтому при $n < 3$ форма $D[v]$ определено положительна. Напротив, при $n > 3$, по аналогичным соображениям, минимум функционала $D[v]$ определено отрицательный. Итак получаем теорему: по отношению к радиальным возмущениям, протекающим вдоль равновесной политропы, шары Эмдена устойчивы, когда индекс политропы $n < 3$, и неустойчивы при $n > 3$. В случае $n = 3$ коэффициент $q = q_1$ и v_1 есть точное решение уравнения (2.23) при условиях (2.20). Здесь $\min D[v]$ исчезает, и мы имеем бифуркацию на линейной серии шаров Эмдена — эти шары находятся в нейтральном равновесии. Согласно вариационной теории запас устойчивости, скажем λ_0 , неуклонно убывает с возрастанием протяжения шара ξ_0 , т. е. с увеличением сжимаемости n . Иными словами, запас устойчивости газового шара неуклонно падает при увеличении сжимаемости шара. Поэтому обмен устойчивости происходит непрерывно при $n = 3$. В М, §2 мы показываем, что фундаментальные частоты возрастают с их номером k и при $k \rightarrow \infty$ $\lambda_k \sim k^2$. Следовательно, неустойчивость возникает только в медленных пульсациях и впервые появляется в самом медленном колебании у шара $n = 3$. При дальнейшем увеличении сжимаемости n наступает потеря устойчивости следующим, более быстрым колебанием и т. д. Это происходит благодаря непрерывному перемещению сопряженных точек уравнения Якоби (2.23) по направлению к центру шара: при $n = 3$ первая такая точка достигает поверхности шара, а при дальнейшем росте n вторая, третья и т. д. точка достигают границы шара и все непрерывно передвигаются к центру.

Однако некоторой осторожности здесь требует переход к шарам $n \geq 5$, так как при этом переходе сама поверхность шара, сдвигается в бесконечность. Согласно (2.6) и (2.19), для шара Эмдена $n = 5$ коэффициент

$$q = \frac{18 - 39\xi^2}{\xi^2(3 + \xi^2)}. \quad (2.28)$$

Эта функция вблизи центра ведет себя, как $2/\xi^2$, а при $\xi \rightarrow \infty$, как $-1/\xi^4$, достигая при некотором $\xi = \xi_1$ наименьшего (отрицательного) значения. Это обстоятельство делает определенной вариационную задачу (2.21), (2.22), т. е. существует нижний предел характеристических чисел формы $D[v]$. Верхний предел этих чисел мы найдем из вспомогательной вариационной проблемы, для которой функция $v \equiv 0$ для всех значений ξ , больших некоторого (пока произвольного).

числа ξ' . Так как решение уравнения Якоби (2.23) при q , определенном посредством (2.28), есть

$$v = \xi^2 (6\theta^3 - \theta) = \frac{\xi^2}{\left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{3/2}} \left(1 - \frac{1}{15}\xi^2\right), \quad (2.29)$$

то, выбирая число $\xi' \geq \sqrt{15}$, мы находим, что минимум $D[v]$ определенно отрицателен и сфера неустойчива только относительно самой медленной пульсации. Появление неустойчивости в первой пульсации мы не проследили, но в предельном случае изотермической сферы $n = \infty$ уже все пульсации ведут к неустойчивости. Действительно, здесь уравнение Якоби (2.23) для функции [преобразуй уравнение пульсаций (1.33) к переменным (2.9)]

$$v \propto \xi e^{-\psi/2} A \quad (2.30)$$

имеет коэффициент

$$q = \frac{2}{\xi^2} + \frac{1}{4}\psi'^2 - 2\frac{\psi'}{\xi} - \frac{1}{2}e^{-\psi}. \quad (2.31)$$

Используя асимптотические выражения (с) и (d) в сносках на стр. 17, мы обнаружим, что функция q вблизи центра ведет себя, как $2/\xi^2$, а при $\xi \rightarrow \infty$, как $-2/\xi^2$, достигая при некотором ξ_1 наименьшего (отрицательного) значения, так что ее изменение подобно изменению q в случае $n=5$. Но так как $|q|$ убывает медленнее, чем в случае $n=5$, и именно, как $1/\xi^2$, то, по теореме Кнезера [31], уравнение Якоби (2.23) имеет бесчисленное множество нулей в интервале $(0, \infty)$ и имеется неустойчивость для всех пульсаций.

Аналогичную картину неустойчивости мы имеем и для особых шаров Эмдена, отвечающих от шара $n=3$ при возрастании n . Согласно (2.11), здесь коэффициент

$$q = -\frac{n(n-3)}{(n-1)^2} \frac{2}{\xi^2} \equiv -\frac{\kappa^2}{\xi^2}.$$

При $\kappa < \frac{1}{2}$ (т. е. $3 < n < 3.1877$) решение уравнения Якоби (2.23)

с условием $v(0)=0$ есть

$$V_{\xi} \left(C_1 \xi V^{\frac{1}{4}-\kappa^2} + C_2 \xi^{-1} V^{\frac{1}{4}-\kappa^2} \right),$$

а при $\kappa = 1/2$ это решение есть

$$V_{\xi} (C_1 + C_2 \ln \xi).$$

При подходящем выборе произвольных постоянных C эти функции имеют нуль для любого наперед выбранного числа ξ , и шары с $\kappa \leq 1/2$

неустойчивы относительно только самого медленного колебания. Но при $x > \frac{1}{2}$ ($n > 3.18 \dots$) решение уравнения (2.23)

$$C_1 V \bar{\xi} \cos \{V x^2 - 1/4 \ln \xi\} + C_2 V \bar{\xi} \sin \{V x^2 - 1/4 \ln \xi\}$$

обладает бесчисленным множеством нулей в интервале $(0, \infty)$, причем точка $\xi=0$ есть точка накопления нулей. Эти шары Эмдена неустойчивы для всех пульсаций. Такое же положение вещей справедливо и для изотермического особого шара с законом плотностей (2.13), так как коэффициент q в этом случае есть $-2/\xi^2$, согласно (2.12) и (2.31), т. е. $x = \sqrt{2}$. Это следует также из первого исследования Джинса [11], согласно которому изотермическая туманность неустойчива, если названная им „функция устойчивости“

$$U_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2\pi G \rho_0}{RT_0} r^2$$

превышает $\frac{1}{2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2$, где l — номер сферической гармоники. При $l=0$ согласно (2.13) это условие неустойчивости выполняется.

Если допустима интерпретация Плуммером и Цейпелем [32] замкнутых звездных скоплений (например, шаровых) как псевдогазовых шаров с индексом политропы, близким к $n=5$ (или большим), то мы заключили бы о нестационарных радиальных движениях звезд в пределах скопления — с точки зрения полученных сейчас результатов Благодаря неустойчивости, которая здесь „взрывного“ характера (см. ниже), скорости звезд при дезинтеграции скопления, вероятно, нарастают со временем до большой величины. С другой стороны, возможность частых и близких встреч между звездами на раннем этапе жизни скопления делает вероятным возбуждение у заметной части звезд собственных колебаний. По теореме равномерного распределения это будут колебания, главным образом, короткого периода. Возможно, что с этим связано сравнительное обилие короткопериодических цефеид в шаровых кучах, распад которых ведет к накоплению этих звезд в высоких галактических широтах.

Отметим также, что неустойчивость шара $n=5$ делает сомнительным значение космогонических результатов Роша и Джинса [33] в ротационной проблеме и проблеме приливов для модели Роша, особенно потому, что вращение, повидимому, не повышает запаса устойчивости (Джинс [11], см. ниже § 4).

Но допустим теперь, что пульсации шаров Эмдена протекают по произвольной адиабате γ , отличной от равновесной адиабаты $\gamma_0 = 1 + \frac{1}{n}$. В этом случае справедливо то же уравнение пульсаций

(1.33), которое ведет для той же функции v (2.16) к уравнению (2.17), где, как легко видеть, коэффициенты q и λ принимают форму

$$\lambda' = \frac{n+1}{\gamma} \frac{k^2}{4\pi G \rho_c} \left(= \frac{\gamma_0}{\gamma} \lambda \right), \quad (2.32)$$

$$q' = \frac{2}{\xi^2} + \frac{n^2-1}{4} \frac{\theta'^2}{\theta^2} - \frac{n+1}{2} \theta^{n-1} - (n+1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right) + \\ + \frac{3\gamma-4}{\gamma} (n+1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right) = q + \left\{ (n-3) + \frac{3\gamma-4}{\gamma} (n+1) \right\} \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right). \quad (2.33)$$

Таким образом, все изменение математической задачи сводится к тому, что вместо чисел λ выступают числа $\frac{\gamma_0}{\gamma} \lambda$, а к функции q добавляется регулярная в том же интервале функция. Тем самым, математическая природа проблемы остается та же и весь предыдущий анализ сохраняет силу. Из (2.26) и (2.33) находим

$$q' - q^* = \frac{3\gamma-4}{4} (n+1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right). \quad (2.34)$$

Поэтому по вышеуказанным соображениям при пульсациях по адиабате $\gamma > 4/3$ всякий шар Эмдена ($\gamma_0 \geq \gamma$) устойчив, а при пульсациях по адиабате $\gamma < 4/3$ неустойчив.

Если γ меняется внутри шара, принимая наименьшее γ_m и наибольшее γ_M значения, то согласно вариационной теории, примененной к уравнению (1.33), пульсации шара Эмдена с $\gamma = \text{const} = \gamma_m$ будут более медленными, а при $\gamma = \text{const} = \gamma_M$ — более быстрыми, чем у шара Эмдена, пульсирующего по переменной адиабате γ . Поэтому всякий шар Эмдена устойчив, пока γ нигде не опускается ниже $4/3$, и неустойчив, если γ нигде не достигает значения $4/3$ внутри шара.

Если какой-нибудь шар Эмдена испытал радиальные возмущения вдоль адиабаты $\gamma = 4/3$, то он продолжает оставаться конфигурацией равновесия (построенной по адиабате γ_0), для которой сжатия или расширения протекают гомологически [ср. (2.16) и (2.24)], т. е. когда амплитуда $A \propto r$. Мы приходим, таким образом, к теореме, обратной теореме Риттера, и к законам гомологичности Лэна (см. стр. 7). * Как

* При радиальном движении без изменения момента инерции полная потенциальная энергия шара U остается неизменной. Это следует из теоремы о вириале, которая дает $U = \frac{4-3\gamma}{3} T$, где T — кинетическая энергия. Но выводы об устойчивости при $\gamma > 4/3$, которые сделал отсюда впервые Джинс [34], неявно предполагают, что система при любом γ деформируется без нарушения равновесия (т. е. гомологически). Это, вообще говоря, не имеет места.

указывалось выше (стр. 9) для газовых шаров без излучения, в отличие от звезд, малая радиальная деформация едва ли способна чувствительно повлиять на отношение удельных теплот, поэтому такие деформации протекают вдоль равновесной адиабаты с точностью до малых второго порядка. Поэтому пока γ_0 отличается от $4/3$, возмущения не будут гомологичными, и деформация шара переводит его из равновесия в состояние движения. Если же реализовался весьма маловероятный случай, когда все газовые массы деформируются точно вдоль адиабаты $\gamma = 4/3$, то это указывает на исходное равновесие с $\gamma_0 = 4/3$ или близкое к нему. Это подтверждает также анализ Томаса [35]. Мы заключаем поэтому, что гомологичные сжатия или расширения суть весьма искусственное состояние движения, едва ли реализующееся для звезд с низкой ролью излучения.

§ 3. ПУЛЬСАЦИИ ГАЗОВЫХ ШАРОВ. ЗАТУХАНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ И „ЗАДЕРЖКА“ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Период пульсаций $P = \frac{2\pi}{k}$ газового шара вдоль адиабаты γ согласно (2.32) определяется соотношением

$$PV\overline{\rho_m} = \sqrt{n \frac{\gamma_0^4 \pi}{\gamma G}} \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \lambda'}}, \quad (3.1)$$

где ω_1 — отношение центральной к средней плотности. Выражая P в долях суток, найдем

$$PV\overline{\rho_m} = 7.95 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\gamma_0^4 \pi}{n \gamma_0} \omega_1(n) \lambda'^4 \right]^{-1/2}. \quad (3.2)$$

Здесь величина $\gamma_0 = 1 + \frac{1}{n}$, а $\omega_1(n)$ зависит только от политродного индекса n и возрастает с ним, в то время, как λ' зависит от n и γ и убывает по мере уменьшения γ и γ_0 . Для газовых шаров без излучения мы провели приближенные вычисления периодов, при $\gamma = \gamma_0$, обычным методом Ритца, выбирая минимизирующую последовательность функций:

$$u_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} P_k(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} x^{2+k} (x_0 - x)^{\frac{2n+1}{2} + k} \quad (3.3)$$

в терминах переменной $x = \int_0^\xi \sqrt{\frac{n}{\theta}} d\xi$; здесь $P_k(x)$ суть некоторые

полиномы. Эти функции удовлетворяют граничным условиям задачи и линейно независимы (см. М, § 2). Неполнота последовательности $P_k(x)$, как мы обнаружили, не влияет на числовые результаты, но сильно

облегчает вычисления. Тогда, как известно, характеристические числа λ' суть корни уравнения [см. М (2.18)]

$$\|\alpha_{kj} - \lambda_1 \gamma_k\| = 0; \quad k, j = 0, 1, 2, \dots, m-1; \quad \lambda_1 \equiv \frac{\lambda'}{n}, \quad (3.4)$$

где

$$\alpha_{kj} = \int_0^{x_0} \left(\frac{dP_k}{dx} \frac{dP_j}{dx} + q_1 P_k P_j \right) dx; \quad \gamma_{kj} = \int_0^{x_0} P_k P_j dx. \quad (3.5)$$

Для каждого шара Эмдена n с помощью таблиц Эмдена были вычислены величины x_0 и коэффициент q_1 (результат приведен в табл. 1 и на рис. 2). В табл. 2 даны числа λ' для главного колебания в третьем

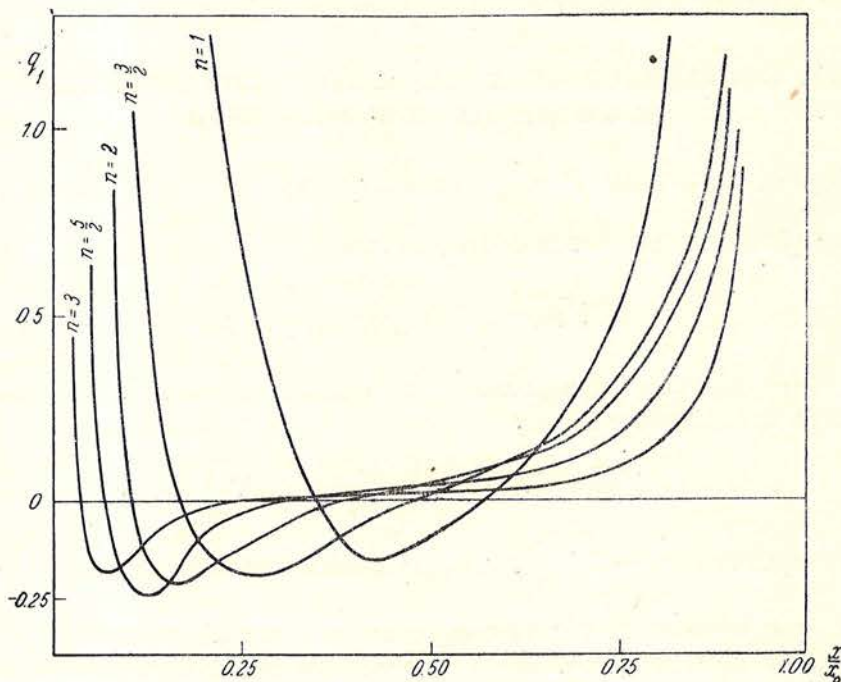


Рис. 2. Графики коэффициента q_1

приближении ($m = 3$). Для шаров $n = 2.5$ и $n = 3$ третье приближение не повышает точности и не было использовано; для шара $n = 3$ значение $\lambda' = 0.0119$ является абсолютной погрешностью 2-го приближения. Как видно из табл. 2, сходимость приближений достаточно хорошая, и числа дают удовлетворительное представление об уменьшении запаса устойчивости с ростом сжимаемости n . По формуле (3.2) подсчитаны периоды в днях самой медленной пульсации (при $\gamma = \gamma_0$), для некоторых типичных значений средней плотности (табл. 3).

Для неустойчивых шаров $n > 3$ время P характеризует скорость уклонения от равновесия. Малая величина λ' в этом случае затруд-

ТАБЛИЦА 1

x/x_0	$n=1$	$n=3/2$	$n=2$	$n=5/2$	$n=3$
0.00	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
.05	+28.0	+7.57	+2.73	+0.628	-0.126
.10	+7.73	+1.17	+0.0805	-0.201	-.150
.15	+3.28	+0.145	-0.190	-0.212	-.0521
.20	+1.52	-0.117	-0.174	-0.0747	-.0133
.25	+0.700	-0.180	-0.115	-0.0250	+.00512
.30	+0.259	-0.174	-0.0575	+5.68.10 ⁻⁴	+.0130
.35	+0.00430	-0.123	-0.0163	+0.0163	+.0172
.40	-0.123	-0.0603	+0.0126	+0.0328	+.0213
.45	-0.136	-0.0159	+0.0367	+0.0379	+.0234
.50	-0.0835	+0.0275	+0.0623	+0.0484	+.0285
.55	-0.0175	+0.0687	+0.0833	+0.0600	+.0344
.60	+0.0610	+0.113	+0.114	+0.0760	+.0423
.65	+0.167	+0.167	+0.144	+0.102	+.0540
.70	+0.341	+0.235	+0.206	+0.132	+.0703
.75	+0.537	+0.358	+0.299	+0.202	+.0984
.80	+0.956	+0.502	+0.443	+0.299	+.150
.85	+1.93	+0.714	+0.702	+0.588	+.259
.90	+3.81	+1.39	+1.28	+0.868	+.635
.95	+4.73	+2.75	+3.81	+1.71	+2.39
1.00	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

няет вычисления, и, например, для шара $n=4.5$ мы получили $\lambda' = -0.000320$ во втором приближении. Для такого шара изменение

возмущений в e -раз происходит за время от нескольких суток до нескольких лет, если средняя плотность меняется от плотности воды до одной десятичной этой величины. Для Солнца такое изменение означало бы уменьшение его размеров

более, чем в 100 раз за полгода. Мы имеем здесь поэтому дело с неустойчивостью „взрывного“ типа (по крайней мере, пока n не слишком близко к 3), — она исключает возможность существования таких шаров в природе. Шары или быстро рассеиваются или спадают к центру, если нет факторов, задерживающих этот процесс.

Но это рассмотрение не учитывает рассеяния энергии, которое для шаров без излучения обусловлено в основном вязкостью. При сжатии шара с $\gamma < 4/3$ гравитационная потенциальная энергия U_{grav}

ТАБЛИЦА 2

n	λ_1	λ_2	λ_3
1	0.849	0.814	0.820
3/2	.187	.186	.187
2	.102	.0905	.0903
5/2	.0538	.0221	—
3	.0285	.0119	—

ТАБЛИЦА 3

$n =$	1	3/2	2	5/2
$\omega_1(n) =$	3.29	6.00	11.4	24.1
$P \sqrt{\frac{r}{\rho_m}} =$	$4. \cdot 10^{-2}$	$7. \cdot 10^{-2}$	$7. \cdot 10^{-2}$	$8. \cdot 10^{-2}$
1.00 г/см ³	0.0483	0.0751	0.0783	0.0819
10 ⁻¹ »	.153	.238	.248	.260
10 ⁻² »	.483	.751	.783	.819
10 ⁻³ »	1.53	2.33	2.48	2.60
10 ⁻⁴ »	4.83	7.51	7.83	8.19
10 ⁻⁶ »	48.3	75.1	78.3	81.9

убывает, но если сохраняется равновесие, полная энергия шара Эмдена

$$U = U_{\text{grav}} + U_{\text{mech}} = \frac{4-3\gamma}{\gamma-1} \int_0^a 4\pi G K \rho_0^\gamma r^2 dr = \left(\gamma - \frac{4}{3}\right) \frac{U_{\text{grav}}}{\gamma-1}$$

должна возрасти ($\gamma < 4/3$) благодаря переходу энергии U_{grav} в энергию U_{mech} . Шар получает это увеличение U_{mech} с некоторым запозданием и потому продолжает неуклонно сжиматься, если не учтена вязкость. Но в вязкой массе некоторая часть изменения потенциальной энергии сразу и непосредственно рассеивается благодаря внутреннему трению частиц при сжатии. Так как вязкость приблизительно не зависит от плотности, то в достаточно диффузной массе она может взять на себя именно ту долю прироста U_{grav} , которая расходовалась бы на неуклонное сжатие, и равновесие вскоре восстановится, может быть, при несколько большей энергии U . В более плотных массах такая компенсация благодаря вязкости меньше, и может остаться нерассеянный избыток гравитационной энергии, который используется для дальнейшего сжатия. Поэтому при $\gamma < 4/3$ диффузное состояние газового шара может оказаться более устойчивым, чем плотное, тогда как в отсутствие вязкости устойчивость достигается только при беспредельном рассеянии массы в пространстве. Это указывает на возможность существования двух классов устойчивых газовых шаров одной и той же массы: плотные шары (малого размера), высокой упругости $\gamma > 4/3$ и диффузные шары (большого размера) с низкой упругостью $\gamma < 4/3$. Остается, однако, важный вопрос: имеется ли непрерывный переход от одной группы шаров к другой, или обе они разделены состояниями неустойчивости?

Для решения вопроса необходимо учесть вязкость в картине малых пульсаций газового шара. Влияние вязкости выражается в трении

газов, проникающих друг в друга при радиальных движениях. Это создает радиальную силу, зависящую от скорости движения газов и коэффициента вязкости μ , так что эйлерово уравнение радиальных движений принимает вид

$$\rho \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} = -g\rho - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{4}{3} r^4 \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\}, \quad (3.6)$$

где обозначения прежние (см. М, § 3). Уравнение энергии для малых движений сохраняется прежним (1.8) или (1.16), так как энергия трения (1.3) содержит только члены второго порядка относительно скорости. Поэтому, используя это уравнение (1.16), получим вместо (3.6) уравнение малых пульсаций в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ \gamma p_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A) \right\} + \left(k^2 + \frac{4g_0}{r} \right) \rho_0 A = \\ = -ik \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{4}{3} r^4 \mu_0 \frac{d}{dr} \left(\frac{A}{r} \right) \right\} \equiv -ik f_r. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Диссипативная сила f_r в правой части этого уравнения действует, вообще говоря, не в фазе со смещением A . Влияние этой силы сильнее сказывается на быстрых колебаниях (k велико), чем на медленных, что вполне естественно, так как последние протекают почти квазистатически. Оно исчезает для гомологичных деформаций ($A \propto r$), которые, следовательно, протекают адиабатически. Но такие деформации протекают при $\gamma = 4/3$, так что вязкость не влияет на положение точки бифуркации у шаров Эмдена. Ламинарная вязкость согласно формуле Майера

$$\mu_0 = \frac{1}{3} \rho \bar{l} \bar{c} \quad (3.8)$$

искажает лишь немного картину адиабатных пульсаций, так как она вносит член в $\sim \frac{m}{\sigma^2}$ раз меньший, чем остальные, а величина $\frac{m}{\sigma^2}$ для

газов очень мала (m — масса частицы, σ — ее эффективный поперечник, $\bar{l}$ — средний свободный путь, $\bar{c}$ — средняя скорость частицы). Но турбулентная вязкость вызывает аналогичным образом значительно больший эффект.

Влияние вязкости может быть учтено посредством теории возмущений, как сделал впервые Росселанд [36]. Мы это сделаем сейчас для шаров Эмдена в форме, несколько отличной от принятой этим автором. Вводя в (3.7) переменные (ξ, θ) Эмдена равенствами (2.1) и безразмерную амплитуду v равенством (2.16), после некоторых очевидных редукций найдем

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} - q' v + \lambda' \frac{1}{\theta} v = -ik\varepsilon\psi(\xi, \theta, v), \quad (3.9)$$

где q' и λ' определяются равенствами (2.32), (2.33), а

$$\varepsilon = \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{\gamma p_c}, \quad \psi = \frac{1}{\xi^2 \theta \frac{n+1}{2}} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^4 \frac{d}{d\xi} \frac{v_0}{\xi^2 \theta \frac{n+1}{2}} \right\}, \quad (3.10)$$

если принять грубо вязкость постоянной (это совершенно не влияет, как мы убедились, на окончательный результат, но слегка изменяет формулы). Допуская ε достаточно малым, полагаем

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \\ k &= k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

где индекс нуль приписан величинам невозмущенной, т. е. проблемы в адиабатическом приближении, § 2 ($\varepsilon = 0$). Подставив эти разложения в (3.9), найдем уравнение для первого приближения

$$\frac{d^2 v_1}{d\xi^2} - q' v_1 + 2 \frac{k_0 k_1}{\beta^2} \frac{v_0}{\theta} + \frac{k_0^2}{\beta^2} \frac{v_1}{\theta} = -i k_0 \psi(\xi, \theta, v_0), \quad \beta^2 \equiv \frac{4 \pi G \rho_c \gamma}{n+1} \quad (3.12)$$

в силу (2.17), которому удовлетворяют v_0 и k_0 . Применяя, как обычно, разложение функции v_1 в ряд по характеристическим функциям невозмущенной проблемы

$$v_1 = \sum_m a_m v_{0m}, \quad (3.13)$$

в силу условий ортогональности и нормировки (2.22), получим для возмущения характеристического числа k_1 выражение

$$2 k_1 = -i \beta^2 \int_0^{\xi_0} \psi(\xi, v_0) v_0 d\xi,$$

или, подставив сюда ψ из (3.10), получим

$$i k_1 = -\frac{\beta^2}{2} \int_0^{\xi_0} \xi^4 \left(\frac{d}{d\xi} \frac{v_0}{\xi^2 \theta \frac{n+1}{2}} \right)^2 d\xi \equiv -\frac{\beta^2}{2} J(n), \quad (3.14)$$

если проинтегрируем по частям и используем граничные условия. Таким образом, в первом приближении частоты пульсаций определяются равенством

$$i k = i k_0 - \frac{1}{2} \varepsilon \beta^2 J(n) \equiv i k_0 - \frac{1}{\tau}. \quad (3.15)$$

В силу выражения для ε (3.10) время затухания будет

$$\tau = \frac{3}{4} \frac{n+1}{4 \pi G \gamma J(n)} \frac{\gamma p_c}{\mu_0 \rho_c}. \quad (3.16)$$

Лапласова скорость $\sqrt{\gamma \frac{\rho_c}{\rho_c}}$ порядка величины $\bar{c}$ в формуле Майера (3.8), поэтому

$$\tau \cong \frac{3}{4} \frac{n+1}{4\pi G \gamma J(n)} \frac{\bar{c}}{\frac{1}{3} \rho \bar{l}}. \quad (3.17)$$

Для пульсирующего ($\gamma > 4/3$) шара $\bar{c}$ порядка $2a/P$ (a — радиус, P — период пульсации). Поэтому под действием ламинарной вязкости (когда $\rho \bar{l} \cong \frac{m}{\pi \sigma^2}$) затухание происходит за время τ не менее 10^{15} лет, как это обнаружили впервые Персико [37] и Росселанд.*

Очень трудно предвидеть резонное значение величины $\frac{1}{3} \rho \bar{l}$ для турбулентной вязкости, если выражать ее законом (3.8), как принято иногда делать [38]. Но, если ориентировочно для пути перемешивания $\bar{l}$ принять величину порядка поперечника небольшой гранулы, то время затухания будет порядка $1/\rho_m$ лет, и пульсации будут затухать чрезвычайно быстро. Это, повидимому, объясняет, почему все плотные звезды не обнаруживают заметных пульсаций.

Для неустойчивых шаров ($\gamma < 4/3$) параметр $k_0^2 < 0$ и при условии $\tau < \frac{1}{|k_0|}$ под влиянием вязкости наступает „временная“ устойчивость газовых шаров: будучи выведен из состояния равновесия, шар пребывает вблизи этого состояния в течение срока не менее $1/|k_0|$; (первое приближение в этом случае ведет даже к затуханию возмущений по закону $\exp \left\{ - \left(\frac{1}{\tau} - |k_0| \right) t \right\}$). Используя для τ выражение (3.17) и подставляя на место c значение $\frac{a}{\pi} |k_0|$, мы получим условие временной устойчивости в виде:

$$\rho_m < \rho_{\text{crit}} \cong \left(\frac{4}{3} \pi \right)^2 \left(\frac{I_n}{\omega_1 |\lambda_0'|} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{3} \rho \bar{l} \right)^{3/2} \frac{1}{VM}, \quad (3.18)$$

если используем формулы (2.32) и (2.7). Здесь $I_n/\omega_1 |\lambda_0'|$ есть безразмерная величина, зависящая только от индекса n политропы. Для ламинарной вязкости $\left(\rho \bar{l} \cong \frac{m}{\pi \sigma^2} \cong 10^{-8} \right)$ величина ρ_{crit} чрезвычайно мала для звездных масс, но для турбулентной вязкости она значи-

* Мы берем значение $P \cong 10^4$ сек., $a \cong 10^{11}$ см, $m \cong 10^{-24}$, $\sigma \cong 10^{-8}$. Никакое резонное изменение этих данных не меняет порядка величины τ . Величина $J(n)$ не превышает $\frac{1}{3} \xi_0^3$.

тельно больше и, может быть, достигает величины порядка 10^{-6} г/см³, т. е. нормальной средней плотности звезд-гигантов (при значениях $\rho \bar{l} \cong 10^7$ и $M \cong 10^{34}$ г.). *

Условие (3.18) показывает, что шары данной массы M при низкой упругости $\gamma < 4/3$ „задерживают“ неустойчивость, если они в диффузном состоянии, и неустойчивы в плотном, как это мы и предвидели выше. Задача будущих исследований — найти количественное выражение закона изменения удельных теплот для физических состояний, возникающих в недрах звезды в течение ее эволюции. Для газовых шаров без излучения естественный путь эволюции состоит в медленном гравитационном сжатии вдоль шкалы Кельвина. При этом средние плотность и температура будут возрастать и столкновения между молекулами газа становятся все более частыми и способными производить тепловую диссоциацию частиц. Следовательно, все меньше и меньше внутренней энергии будет сосредотачиваться в междумолекулярной связи, вибрационных и ротационных движениях, так что в среднем индекс политропы

$$n = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{E_{\text{bound}}}{E_{\text{trans}}} \right)$$

будет неуклонно убывать (E_{bound} — энергия внутримолекулярная, а E_{trans} — энергия переносных движений). Это значит, что $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, которая

близка к величине $1 + \frac{1}{n}$ (или точно равна ей), будет неуклонно возрастать. Одновременно, шар становится все более однородным (ω_1 убывает). Однозначная связь между температурой и плотностью позволяет контракционную эволюцию политропного шара характеризовать увеличением только средней плотности, вызывающим возрастание величины γ . Вместе с тем согласно § 2 возрастает запас устойчивости λ_0' и понижается полная энергия. Если эволюция шара „начинается“ от весьма диффузного состояния с низкой упругостью $\gamma < 4/3$, то достаточно массивные (скажем с массой $M > \mathfrak{M}$) шары имеют больше шансов потерять свою устойчивость в ходе контракционной эво-

* Поскольку разложение (3.11) предусматривает, что члены, содержащие $\epsilon k_1 = \frac{1}{\tau}$ и т. д., малы, то может появиться сомнение в возможности условия $\frac{1}{\tau} > |k_0|$, а вместе с тем (3.18) вообще. Доказательства возможности разложений по параметру в задачах Штурма—Лиувилля до сих пор не существует. Однако естественно считать по аналогии с обычным разложением Тейлора $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots$, что разложение (3.11) осуществимо для любого k_0 , в частности $k_0 = 0$ (т. е. для любого γ), так же как и разложение Тейлора осуществимо при любом конечном $f(a)$ (в частности $f(a) = 0$), если функция непрерывна возле $x = a$. Вопрос о том, что могут внести второе и третье приближения в случае малых k_0 , мы оставляем открытым ввиду его сложности.

люции, достигнув сжатия, при котором $\rho_m = \rho_{crit}$. * Менее массивные шары ($M < m$) достигают такого уплотнения, при котором станет $\gamma \geq 4/3$, прежде, чем средняя плотность достигает величины ρ_{crit} . Но тогда такому шару никак не последующее сжатие не „угрожает“ потерей устойчивости, сжатие будет сопровождаться лишь сокращением пульсаций (см. табл. 3) и времени затухания $\tau \sim 1/\rho_m$, т. е. пульсации исчезают в процессе контракционной эволюции.

Рис. 3 иллюстрирует сказанное. В системе осей (ρ_m, M) место шаров с $\gamma = 4/3$ ориентировочно изображено прямой $\rho_m = \rho'_m$, а кривая $\rho_m = \rho_{crit}$ построена согласно формуле (3.18). Заштрихована область наибольшей неустойчивости. Кривые T_{m1} , T_{m2} — суть места $T_m = \text{const}$, проведенные согласно уравнению

$$\rho_m = \frac{3}{4\pi} \left[\frac{R}{\mu} \frac{5-n}{G} T_m \right]^3 \frac{1}{M^2},$$

справедливого для политропных шаров [39]. Интересна возможность существования временно устойчивых шаров большого размера с той же средней температурой, что и для устойчивых шаров малого размера. Более детальное обсуждение этих результатов применительно к звездам мы, однако, оставляем на конец статьи.

§ 4. НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВЫХ ШАРОВ, ЭФФЕКТ МЕДЛЕННОГО ВРАЩЕНИЯ

Строго радиальное движение, которое мы до сих пор рассматривали, есть весьма искусственное состояние движения, особенно, при наличии даже медленного вращения. Наступающая при низкой упругости неустойчивость, вероятно, проявляется в „разрушающей“ волне сжатия, приливного типа, охватывающей большую часть поверхности сферы, но не всю ее. Важно поэтому исследовать устойчивость в вибрациях сферически-гармонического типа $l \geq 1$ (см. § 1). Нерадиаль-

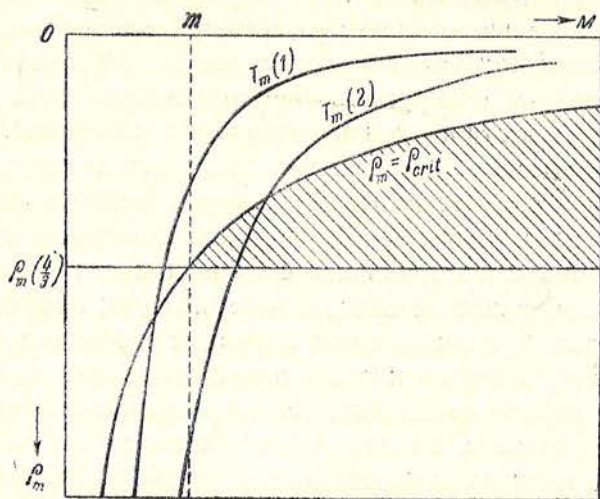


Рис. 3. Диаграмма устойчивости газовых шаров

* Аккуратное рассмотрение показывает, что зависящий от n фактор в выражении ρ_{crit} (3.18) не чувствителен к изменениям n .

ные колебания газовых сфер рассматривались в работах Росселанда [40], Пекериса [41], Коулинга [42] и автора [12] с различных точек зрения. Росселанд, принимая, что возмущение гравитационного поля при таких колебаниях обладает радиальной симметрией, находит условие затухания колебаний под действием радиативной проводимости. Пекерису удалось обнаружить неустойчивость однородного адиабатного шара в отношении нерадиальных колебаний. Коулинг недавно сделал интересное указание, что такие колебания могут возбуждаться благодаря приливным возмущениям в двойных звездах (в случае их вращения). Если период вращения компонент отличен от орбитального периода, то приливная сила производит периодическое нерадиальное возмущение на всякую точку звезды; при совпадении периода приливного возмущения с периодом свободных колебаний возможен резонанс, ведущий к росту приливной волны и, в крайнем случае, к разделению компонент. Пренебрегая возмущениями гравитационного потенциала, он нашел множество состояний нейтрального равновесия относительно нерадиальных колебаний. Однако он не обнаружил усиливающего действия резонанса на колебания двойных звезд. К сожалению, использованное Коулингом приближение обычной теории звука лишает проблему ее основного специфического интереса для астрономов. Наконец, автор не обнаружил неустойчивости шаров Эмдена относительно нерадиальных колебаний, имеющих узел на границе. Однако это условие на границе не естественно, и в настоящем параграфе дан анализ, свободный от указанных упрощений.

Исходные уравнения суть (1.30), (1.31). Введем в правую часть (1.30) вместо амплитуды конденсации B' амплитуду дилатации B равенством (1.27), тогда получим систему

$$-k^2 A = \frac{dC}{dr}, \quad (4.1)$$

$$k^2 \left\{ B - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A) \right\} = \frac{l(l+1)}{r^2} C. \quad (4.2)$$

Если в вибрации l имеется бифуркация ($k=0$), то должно быть

$$C=0. \quad (4.3)$$

Вспоминая выражения для C (1.29) и амплитуды колебания потенциала U_0 (1.28), запишем это условие в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^r \left(A \frac{d\rho_0}{dr} + B\rho_0 \right) r^{l+2} dr + \\ & + \frac{4\pi G}{2l+1} r^l \int_r^a \left(A \frac{d\rho_0}{dr} + B\rho_0 \right) \frac{dr}{r^{l-1}} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left(A \frac{d\rho_0}{dr} + B\rho_0 \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Умножая это уравнение на r^{l+1} и дифференцируя по r два раза, найдем

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{4\pi G\rho_0}{\gamma\rho_0 l\rho_0} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0, \quad (4.5)$$

где величина

$$u = r \frac{\gamma\rho_0}{\rho_0^2} \left(A \frac{d\rho_0}{dr} + B\rho_0 \right) \quad (4.6)$$

должна удовлетворять согласно (4.4) условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= 0, \\ \left[\frac{du}{dr} + \frac{l}{r} u \right]_{r=a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Обратно, если существует нетривиальное решение граничной задачи (4.5), (4.7), то оно тождественно удовлетворяет интегральному уравнению (4.4) и, следовательно, $C=0$. Однако, если бы при этом было $\lambda = k^2 \neq 0$, то согласно (4.1), (4.2) было бы $A \equiv 0$, $B \equiv 0$, т. е. $u \equiv 0$, что противоречит допущению. Следовательно, существование нетривиального решения рассматриваемой граничной задачи есть необходимый и достаточный признак бифуркации. Эта граничная задача в переменных Эмдена (2.1) есть

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(n\theta^{n-1} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \right) u = 0, \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \xi \rightarrow 0, \quad u(\xi) &= O(\xi^{l+1}), \\ \text{при } \xi = \xi_0, \quad \frac{du}{d\xi} + \frac{l}{\xi} u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Метод сравнения Штурма, примененный в § 2, позволяет исследовать появление бифуркаций с помощью этой граничной проблемы. Мы полагаем

$$F = \frac{du}{d\xi} + \frac{l}{\xi} u, \quad (4.10)$$

тогда система уравнений сводится к следующей:

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} - \frac{d \ln n\theta^{n-1}}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} + \left\{ n\theta^{n-1} + \frac{l}{\xi} \frac{d \ln n\theta^{n-1}}{d\xi} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \right\} F = 0, \quad (4.11)$$

$$F(0) = F(\xi_0) = 0, \quad (4.12)$$

Уравнение (4.11) с помощью подстановки

$$U = \frac{1}{\sqrt{n\theta^{n-1}}} F \quad (4.13)$$

сводится к нормальному виду

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + QU = 0, \quad (4.14)$$

где

$$Q = \frac{n+1}{2} \theta^{n-1} - \frac{n^2-1}{4} \frac{\theta'^2}{\theta^2} - (l-1)(n-1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right) - \frac{l(l-1)}{\xi^2}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим функцию

$$U_1 = \xi^l \theta^{\frac{n+1}{2}}, \quad (4.16)$$

которая осциллирует точно в интервале $(0, \xi_0)$. Она удовлетворяет уравнению вида (4.14), но вместо величины Q здесь будет стоять

$$Q_1 = \frac{n+1}{2} \theta^{n-1} - \frac{n^2-1}{4} \frac{\theta'^2}{\theta^2} + (l-1)(n+1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right) - \frac{l(l-1)}{\xi^2}. \quad (4.17)$$

Сравнивая (4.15) и (4.17), находим

$$Q_1 - Q = 2n(l-1) \left(-\frac{\theta'}{\xi\theta} \right), \quad l \geq 1, \quad (4.18)$$

откуда следует, что при $l > 1$ нет осциллирующих решений уравнения (4.14) в интервале $(0, \xi_0)$, а при $l=1$ существует решение $U=U_1$, осциллирующее точно в $(0, \xi_0)$. В силу уравнения Эмдена (2.2) это решение дает для u выражение

$$u = \frac{\sqrt{n}}{\xi} \int_0^\xi \theta^n \xi^2 d\xi = -\sqrt{n}\theta. \quad (4.19)$$

Легко проверить, что (4.19) есть точное решение проблемы (4.8), (4.9) при $l=1$, т. е. все шары Эмдена имеют бифуркацию в вибрации $l=1$. Этот вывод может быть установлен также путем числовой интеграции уравнения (4.8) (см. М, § 4). Что касается вибраций $l > 1$, то, отправляясь от устойчивого для нерадиальных колебаний шара Эмдена $n=0$, мы не встречаем обмена устойчивости ни для одной из вибраций $l > 1$. Поэтому все шары Эмдена устойчивы относительно вибраций сферически-гармонического типа $l > 1$. * Это следует также из того,

* Здесь требуется некоторая осторожность. В случае $n < 1$, функция F , так же как и U , не осциллирует в $(0, \xi_0)$. При $\xi \rightarrow \xi_0$ коэффициент $Q_l \approx \frac{1-n^2}{4} (\xi_0 - \xi)^{-2}$, т. е. имеет регулярную особенность. Корни фундаментального уравнения суть $\frac{n+1}{2}$ и $\frac{1-n}{2}$ и при $n > 1$ неосциллирующее решение (4.14) ведет себя, как $\theta^{\frac{1-n}{2}}$ при $\xi \rightarrow \xi_0$. Но так как при $l > 1$ решение уравнения (4.14) с условием $U(0)=0$ не осциллирует, то функция $F(\xi) = O(1)$ при $\xi \rightarrow \xi_0$ и бифуркаций нет также в случае $n > 1$.

что коэффициент Q_l монотонно убывает с l , так что бифуркация и неустойчивость могут возникнуть только в вибрациях низшего порядка l , в то время как в вибрациях высших гармоник сфера сохраняет устойчивость.

Специального внимания требуют изотермические и особые шары Эмдена. Для изотермической сферы ($n=\infty$) на место $n\theta^{n-1}$ в уравнении (4.8) встает функция $e^{-\psi}$ (см. начало § 2), причем второе условие (4.9) должно выполняться асимптотически при $\xi_0 \rightarrow \infty$. Для вибрации $l=1$ функция

$$\frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \xi^2 e^{-\psi} d\xi$$

удовлетворяет граничной проблеме, так что бифуркация имеется в этой вибрации; но, как может легко убедиться читатель, ее нет в вибрациях $l > 1$. Поэтому для изотермического шара сохраняется то же положение с устойчивостью для нерадиальных колебаний, что и для остальных шаров Эмдена. Но для особого изотермического шара с законом плотностей $\rho_0 \sim 1/r^2$ (2.13) бифуркации отсутствуют вовсе в вибрациях $l \geq 1$, как в этом нетрудно убедиться с помощью формулы (2.12). Этот вывод впервые был достигнут Джинсом [11].

Тот же вывод мы должны сделать и для особых шаров Эмдена, построенных по законам (2.11) ($n > 3$).

Проблема нахождения периодов и амплитуд нерадиальных колебаний — большой сложности. Исходная система уравнений для амплитуд (1.30), (1.31) может быть, вообще говоря, сведена к однородному интегральному уравнению для амплитуды конденсации (смотри М, § 5), так что проблема обладает дискретной последовательностью характеристических чисел k , возрастающих с l . Нетрудно также показать, что найденное нами решение (4.19) для вибрации $l=1$ действительно удовлетворяет этому общему уравнению при $k=0$. Однако исследование высших вибраций сферически-гармонического типа встречает большие трудности и, вероятно, может быть проведено только приближенным методом Ритца, чего нами пока не сделано.

Существование бифуркации у шаров Эмдена относительно гармоники $l=1$ представляет особый интерес, и мы рассмотрим несколько ближе деформации, соответствующие этому случаю. Нетрудно убедиться, что здесь радиальное смещение не имеет узлов внутри массы, кроме экватора гармоник, где все возмущения исчезают и движение целиком тангенциальное в направлении полярной оси гармоник (см. М, § 6). Возмущения плотности, потенциала и давления в случае $l=1$ суть (с точностью до постоянного множителя)

$$\rho' = (-\theta') \theta^{n-1} S_1 e^{ikt}, \quad U' = (-\theta') S_1 e^{ikt}, \quad p' = (-\theta') \theta^n S_1 e^{ikt}, \quad (4.20)$$

согласно формулам (4.19), (4.6) и определениям § 1. Отсюда видно, что вдоль самой оси гармоник ($S_1=1$) движение газов чисто радиальное, от одного полюса к другому, и обратно; центр ($\theta'=0$) и граница ($\theta=0$) суть узлы давления, плотности и потенциала. Наибольшая деформация уровенных поверхностей достигается в месте наибольшего ускорения силы тяжести g_0 , которое пропорционально $-\theta'$ [см. формулу (2.3) для M/ξ^2]. Таким образом, при колебании $l=1$ происходит перетекание газовых масс из одной полусферы в другую, происходящее, в основном, вдоль сферы с наибольшим напряжением гравитации и постепенно «затухающее» к центру и внешней границе. Внешняя уровенная поверхность деформируется при этом от сферы к асимметричному сфероиду, слегка вытянутому в направлении на один из полюсов гармоник, хотя поверхность нулевой плотности остается при этом сферой. Для несжимаемой сферы $n=0$ бифуркация в рассматриваемом колебании вырождается в простое перемещение сферы в целом. Для сферы, построенной по закону Лапласа ($n=1$), существование бифуркации в колебаниях $l=1$ и представляющих тангенциальное перемещение «серединных» слоев, обнаружено впервые Джинсом [43], а затем автором [44]. Таким образом, шары высокой упругости ($n < 3$) могут потерять устойчивость относительно гармонической вибрации $l=1$ раньше, чем относительно радиального колебания $l=0$. Аналогичное явление обнаружил Ляв [45] для однородных шаров с исчезающей жесткостью.

Однако, ускоряет ли медленное вращение шара наступление неустойчивости относительно нерадиальных колебаний? Эта важная проблема связана с очень большими математическими трудностями и допускает успех только в приближенной интерпретации. Величина безразмерного параметра

$$\epsilon^2 = \frac{\omega^2}{2\pi G \rho_m} \quad (4.21)$$

(ω — угловая скорость) для Солнца не превышает $2 \cdot 10^{-5}$. Для звезд ранних классов она едва ли превышает 0.01. Поэтому при грубом изучении устойчивости кажется полезным использовать прием разложения возмущений во вращающемся шаре по параметру ϵ , подобно тому, как это сделано Милном [46] и Чандрасекаром [47] при изучении строения медленно вращающихся звезд. Однако даже в этом случае удастся оценить влияние вращения на устойчивость только для однородного шара. Кажется вероятным, что неоднородность реальных шаров способна только усилить это влияние, так как вращение имеет тенденцию ослабить гравитационное накопление материи у центра при неустойчивости, т. е. оно действует в том же направлении, что и обычная упругость газа, и как бы повышает ее. В неоднородной сфере такая тенденция выражена слабее, нежели в однородной массе того же размера, предполагая вращение равномерным.

В системе координат, вращающихся равномерно около оси z , движение газовых масс (без вязкости) подчиняется уравнениям [48]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - 2\omega v - \omega^2 x &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{Dv}{Dt} + 2\omega u - \omega^2 y &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Для малого движения вдоль равновесной адиабаты эта система, очевидно, сводится к следующей:

$$\frac{du}{dt} - 2\omega v = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} + 2\omega u = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad (4.23)$$

[сравни вывод уравнения (1.18)]. Вычисляя прямоугольные составляющие смещения s через изменения полярных координат δr , $\delta \theta$, $\delta \varphi$ и обозначая скорости изменения этих координат через u_θ , v_φ , w_r , ($u_\theta = \frac{\partial \delta \theta}{\partial t}$ и т. д.), мы получим вместо (4.23) после некоторых преобразований следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_\theta}{dt} - 2v_\varphi \omega \cos \theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} + 2u_\theta \omega \cos \theta + 2w_r \omega \sin \theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \\ \frac{dw_r}{dt} - 2v_\varphi \omega \sin \theta &= \frac{\partial \chi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Это суть основные уравнения динамической теории атмосферных приливов [48]. Вводя в эти уравнения временный фактор e^{ikt} при возмущениях и исключая поочередно δr , $\delta \theta$ и $\delta \varphi$ между уравнениями этой системы, мы найдем ей эквивалентную:

$$\left. \begin{aligned} (4\omega^2 - k^2) \delta r &= \left(1 - \frac{4\omega^2}{k^2} \cos^2 \theta\right) \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{4\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{k^2 r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{2\omega}{ik} \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \\ (4\omega^2 - k^2) r \delta \theta &= \left(1 - \frac{4\omega^2}{k^2} \sin^2 \theta\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{4\omega^2}{k^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{2\omega \cos \theta}{ik \sin \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \\ (4\omega^2 - k^2) r \sin \theta \delta \varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{2\omega}{ik} \left(\sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Следующее основное уравнение есть уравнение сплошности (1.15), из которого нетрудно вывести соотношение

$$\nabla^2 \chi = \frac{4\omega^2}{k^2} L(\chi) + (4\omega^2 - k^2) \Delta, \quad (4.26)$$

где $L(\chi)$ обозначает оператор $\partial^2/\partial z^2$ в полярных координатах, а Δ — дилатация (см. М, § 6). Наконец, третье основное уравнение есть уравнение Пуассона (1.13), которое согласно определению χ (1.13) и уравнению (4.26) может быть записано в виде

$$\nabla^2 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \sigma + 4\pi G \rho_0 \sigma = (k^2 - 4\omega^2) \Delta - \frac{4\omega^2}{k^2} L(\chi). \quad (4.27)$$

Система уравнений (4.25), (4.26), (4.27) образует основную систему для исследования малых колебаний медленно вращающегося шара.

Принимая грубо сферу в качестве граничной поверхности медленно вращающейся массы, вместо граничного условия (1.34) будем иметь

$$\text{при } r=a, \quad \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \sigma = - (s, \text{grad } \Omega_0),$$

где Ω_0 — потенциал гравитационной и центробежной силы;

$$\Omega_0 = U_0 + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta$$

в полярных координатах. Это уравнение иначе можно записать так:

$$-\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \sigma = \frac{\partial U_0}{\partial r} \delta r + \omega^2 r \sin^2 \theta (\delta r + r \operatorname{ctg} \theta \delta \theta).$$

Поэтому, выражая член в скобках с помощью уравнений движения (4.25), после некоторых алгебраических преобразований будем иметь в качестве граничного условия следующее:

$$\begin{aligned} (k^2 - 4\omega^2) \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{g_a} \sigma = & \left(1 - \frac{4\omega^2}{k^2}\right) \frac{\partial \chi}{\partial r} + \left(\frac{4\omega^2}{k^2} + r \frac{\omega^2}{g_a}\right) \sin^2 \theta \frac{\partial \chi}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{4\omega^2}{k^2} + r \frac{\omega^2}{g_a}\right) \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{2\omega}{ik} \frac{1}{r} \left(1 + r \frac{\omega^2}{g_a}\right) \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}; \\ g_a \equiv & \left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)_{r=a}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Решение основной системы, удовлетворяющее этому условию, мы ищем в виде разложений

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots, \\ \chi &= \chi_0 + \varepsilon \chi_1 + \varepsilon^2 \chi_2 + \dots, \\ \lambda &= k^2 = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

в ряды по параметру ε (4.21), считая газовый шар однородным, так что $\Delta = -\sigma$. Влияние вращения на малые колебания газового шара в первом приближении связано только с силой Кориолиса, производящей дополнительное отклонение по долготе малого движения от такового движения в невращающемся шаре (оно появляется благодаря члену

$\frac{2\omega}{ik} \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}$). Вычисление этого эффекта, проведенное в М, § 7, приводит к следующему выражению для возмущения фундаментальной частоты в вибрации l :

$$-\frac{1}{\lambda_1} \cong \frac{a}{\frac{\gamma p_0}{\rho_0} s \sqrt{2\pi G \rho_0 \lambda_0}} \frac{z}{2} h_l(z); \quad (\lambda_0 \rightarrow 0), \quad (4.30)$$

при условии, что в отсутствии вращения шар находится вблизи точки бифуркации ($\lambda_0 \rightarrow 0$). Для наиболее медленного колебания ($z = z_0$) величина $h_l(z)$ существенно положительна, так что величина $\lambda_1 < 0$, т. е. медленное вращение в первом приближении делает неустойчивым газовый шар, находящийся в нейтральном равновесии относительно сферически-гармонической вибрации порядка l .

Неустойчивость медленно вращающегося газового шара относительно собственной вибрации $l=1$ может повести к разрушению шара. Трудно проследить процесс развития этой неустойчивости, так как ему будет сопутствовать возникновение неравномерностей вращения.* Однако кажется вероятным, что процесс приведет к выделению обособленно вращающегося спутника в зоне наибольшего уплотнения, которое развивается между центром и периферией одной из полусфер газового шара [см. (4.20)]. Возможно, что этот процесс способен объяснить происхождение тесных двойных звезд.

§ 5. РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД. ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ЗВЕЗДЫ

До сих пор мы игнорировали роль излучения в формировании равновесия и переносе энергии. Для звезд движущаяся частица получает теплоту [см. (1.1)]

$$\frac{DQ}{Dt} = -\operatorname{div} \mathbf{H} + \Phi, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{H}$ — поток тепла благодаря проводимости. Внутренняя энергия E составляется из термической энергии E_t газа и излучения и субатомной энергии E_s источников, производящих теплоту внутри звезды (например, ядерные реакции и пр.). Последняя не играет роли в движении звездного газа (материя плюс излучение) и проявляется только как теплота $\varepsilon = -\partial E_s / \partial t$, возникающая в данной точке звезды и которая должна быть добавлена к (5.1). Поэтому первый закон термодинамики для звездного газа в движении [ср. (1.8)] есть

$$\frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{E}_t \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \varepsilon - \operatorname{div} \mathbf{H} + \Phi. \quad (5.2)$$

* Вибрация $l=1$ делает поверхности $U = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$ не совпадающими.

Если звезда находится в покое и установившемся состоянии, когда она отдает в пространство столько же энергии, сколько производит внутри, это уравнение сводится к

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 4\pi\epsilon_0, \quad (5.3)$$

и для сферической звезды радиальный поток излучения есть

$$H_r = \frac{1}{r^2} \int_0^r \epsilon_0 r'^2 dr'. \quad (5.4)$$

К обычному газовому давлению p_G в звезде прибавляется давление излучения p_R , изменение которого на отрезке dr пропорционально потере импульса H_r/c излучения, т. е.

$$dp_R = -k_0 \epsilon_0 \frac{H_r}{c} dr, \quad (5.5)$$

где k_0 — коэффициент поглощения на единицу массы, который дается формулой Крамерса—Эддингтона

$$k_0 = \frac{k_1}{\mu} \frac{\rho_0}{T_0^{7/2}} \quad (5.6)$$

для газовой звезды, в недрах которой господствуют температуры не выше 30 млн. градусов; при больших температурах в поглощении излучения заметную роль начинают играть другие процессы (рассеяние и фотоэлектрическое образование пар позитрон — электрон). Благодаря большой непрозрачности материя в звезде находится в состоянии локального термодинамического равновесия и $p_R = \frac{1}{3} a T_0^4$, $a T_0^4 = u$ есть плотность энергии излучения. Структура звезды в равновесии, как и прежде, фиксируется уравнением Пуассона (1.7)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp_0}{dr} \right) = -4\pi G \rho_0, \quad (5.7)$$

где $p_0 = p_G + p_R$, при условии теплового равновесия (5.3), которое согласно уравнению (5.5) будет

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{c}{k_0 \rho_0} \frac{dp_R}{dr} \right) = -4\pi \epsilon_0. \quad (5.8)$$

Отсутствие надежных знаний о величине ϵ_0 (источники энергии) делает проблему строения звезды в равновесии не вполне определенной. Основную роль в астрофизике играет модель „стандартной звезды“ Эддингтона [49], на которой мы будем основываться в дальнейшем и остановим несколько свое внимание сейчас. Обозначим через ϵ осво-

бождение энергии на грамм ($= \frac{\epsilon_0}{\rho_0}$); среднее значение этой величины в сфере массы $M(r)$ есть

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^r \epsilon 4\pi r^2 \rho_0 dr}{\int_0^r 4\pi r^2 \rho_0 dr} = \frac{L(r)}{M(r)}, \quad (5.9)$$

где $L(r) = 4\pi r^2 H_r$ — энергия, испускаемая сферой в 1 сек. [см. (5.4)]. Тогда, интегрируя один раз уравнения (5.7) и (5.8) и деля результаты, найдем

$$\frac{dp_R}{dp_0} = \frac{k\eta L}{4\pi c G M}, \quad (5.10)$$

где $\eta = \bar{\epsilon} \frac{L}{M}$, а L и M — яркость и масса звезды. Пренебрегая внешним давлением, строго получим

$$p_R = \frac{\bar{k}\eta L}{4\pi c G M} p_0; \quad \bar{k}\eta = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} k\eta dp_0. \quad (5.11)$$

В основе стандартной модели лежит допущение Эддингтона $\bar{k}\eta = \text{const}$. Если положить

$$p_R = \frac{1}{3} a T_0^4 = (1 - \beta) p_0, \quad p_G = \frac{R}{\mu} \rho_0 T_0 = \beta p_0, \quad (5.12)$$

то это допущение, иными словами, означает, что сравнительная роль давления газа и давления излучения неизменна по всей звезде. Из (5.12) следует, что

$$T_0 = \left[\frac{R}{\mu} \frac{3}{a} \frac{1 - \beta}{\beta} \right]^{1/4} \rho_0^{1/4}. \quad (5.13)$$

Далее, полное давление во всякой газовой звезде выражается формулой

$$p_0 = \left[\left(\frac{R}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right]^{1/4} \equiv K \rho_0^{4/3}. \quad (5.14)$$

Но для стандартной звезды β постоянно, и звезда сводится к политропному газовому шару $n=3$ (см. § 2). При данных радиусе a , массе M и яркости L звезды равенство (2.7) фиксирует плотность в центре звезды ρ_c , а уравнение (2.8) в силу (5.14) принимает форму:

$$1 - \beta = \frac{c}{\omega^2} M^2 \mu^4 \beta^4. \quad (5.15)$$

Но согласно (5.11) и (5.12) отношение

$$\beta = 1 - \frac{\bar{k}\eta L}{4\pi cGM}. \quad (5.16)$$

С одной стороны, при заданной массе (и молекулярном весе μ) равенство (5.15) фиксирует β и позволяет с помощью (2.5) найти центральную температуру. С другой стороны, в силу (5.16) это равенство является соотношением между массой и яркостью. Для звезды с хорошо известными M и L , например, для Капеллы, мы можем найти β из формулы (5.15), а затем из равенства (5.16) найти $\bar{k}\eta$ („астрономическая непрозрачность“). Считая $\bar{k}\eta$ одинаковым для рассматриваемых звезд, мы строим с помощью тех же формул зависимость яркости L от массы M для этого значения $\bar{k}\eta$. Наблюдения показывают совершенное согласие с такой зависимостью. Однако эта величина $\bar{k}\eta$ ведет к заметно большему значению коэффициента непрозрачности k , чем это дает лабораторно проверенный закон Крамерса (5.6). Это несоответствие можно устранить, приняв в соответствии с исследованиями химического состава звездных атмосфер, что звезды содержат в большем изобилии водород (35% по весу), т. е. что молекулярный вес звездной материи μ ниже, чем это принял сначала Эддингтон, именно принять $\mu \cong 1$. Далее, согласно (5.6) коэффициент непрозрачности k растет вглубь звезды как $T_0^{-1/2}$, поэтому гипотеза $\bar{k}\eta = \text{const}$ требует, чтобы величина η возрастала вглубь звезды приблизительно, как $T_0^{1/2}$, т. е. чтобы источники были сконцентрированы в достаточной степени у центра. Если, желая выразить эту концентрацию, мы приняли бы закон $\epsilon \sim T^m$ ($m > 0$), то нетрудно убедиться, что величина $\bar{k}\eta$ меняется лишь незначительно по всей звезде (не более, чем в 3 раза при $m \leq 4$). Это позволяет думать, что невязка астрономической и лабораторной непрозрачности может быть также связана с большей концентрацией источников к центру, чем это принимает Эддингтон при своих вычислениях. В крайнем случае, когда все источники сосредоточены в центре газовой звезды (point-source model), мы получаем, согласно вычислениям Коулинга [50], практически те же значения плотности и температуры в центре, что и для модели Эддингтона. Такая модель point-source, как показал Бирман [51], также удовлетворяет наблюдаемой зависимости масса—светимость. Во всяком случае у реальных звезд величина $\epsilon = L/M$ возрастает с массой звезды значительно сильнее, нежели центральная (или средняя) температура, которая всегда изменяется, как потенциал GM/a . Это указывает, что ϵ должно меняться, как высокая степень температуры. Такую резкую зависимость дает формула Аткинсона для ядерных реакций (например, для углеродного цикла можно принять в виде грубой аппроксимации $m \cong 16-17$ [52]). Но, с другой стороны, наибольшая частота значений концентрации масс к центру звезды, вычисляемая по наблюдаемой

скорости перемещения линии апсид в затменных переменных, соответствует значению, даваемому теорией Эддингтона. Поэтому возможно, что концентрация источников энергии к центру звезды не отличается резко от той, которая допустима в модели Эддингтона. Кроме того, исследования Джинса и Волтэ [53] показывают, что в фотосферных слоях звезды отношение давления радиации к газовому давлению есть очень медленно меняющаяся функция глубины, т. е. что эти слои приближенно соответствуют модели Эддингтона. Все эти соображения позволяют думать, что модель Эддингтона в грубых чертах правильно описывает положение вещей в реальных звездах главной последовательности, за исключением, может быть, самых центральных частей звезды, где развивается конвекция, а также, конечно, звезд-гигантов большой массы и белых карликов.

С точки зрения Милна [54] (см. § 2) проблема строения газовой звезды должна опираться на сведения, которые более или менее достоверно известны для внешних слоев звезды (фотосфера). В этих слоях источники отсутствуют, $\eta=1$, и можно считать $k\eta=\bar{k}_0$ — коэффициенту непрозрачности в фотосфере, который может быть выведен из теории фотосфер, если известны давление в фотосфере и радиус звезды. Тогда, при данных M и L формулы (5.15), (5.16) фиксируют нам число ω и мы, как в § 2, приходим к возможности M - и F -решений. Такие решения будут указывать на отклонения внутри звезд от законов идеальных газов. Однако фотосфера содержит слишком мало массы, чтобы надежно фиксировать постоянную в законе $\bar{k}\eta=\text{const}$ для всей звезды. С другой стороны, Мили полагает [27], что звезда Эддингтона находится в нейтральном равновесии и, подобно политропному шару без излучения, способна к гомологичным сжатиям, не нарушающим равновесие, т. е. что возмущения протекают вдоль невозмущенной политропы $\gamma_0=4/3$. Если бы это было так, то действительно звезда с данными M и L могла бы иметь любой радиус в зависимости от того, какова величина $\bar{k}_0$: звезда расширилась бы или сжалась бы так, чтобы величина $\bar{k}_0$ приспособилась к условиям механического равновесия согласно формуле (5.16). Но политропа $\gamma_0=4/3$ для звезды Эддингтона есть неуклонное следствие уравнений равновесия, поэтому эта критика Милна несостоятельна; мы увидим ниже, что гомологичные сокращения звезды возможны лишь как редчайшее исключение.

Всякое отклонение от равновесия излучающей массы протекает вообще вдоль другой адиабаты с числом $\gamma \neq \gamma_0$, которое может быть рассматриваемо как эффективное отношение удельных теплоемкостей материи плюс излучение в движении. Это мы обнаруживаем непосредственно из рассмотрения малого движения возле состояния рав-

новесия. Согласно уравнению (5.2) возмущения энергии удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{E}_0 \mathbf{v} + p_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = \varepsilon' - \operatorname{div} \mathbf{H}', \quad (5.17)$$

пренебрегая энергией трения, как содержащей только квадраты скоростей. Если теплота ε , возникающая в звезде, зависит от температуры и плотности, то в общем случае

$$\varepsilon' = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T_0} T' + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \rho_0} \rho' + \varepsilon'_0 = \varepsilon_1 T' + \varepsilon_2 \rho' + \varepsilon'_0, \quad (5.18)$$

где ε'_0 — теплота, возникающая спонтанно при малых движениях. Далее

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 T' + \mathcal{E}_2 \rho'; \quad p' = p_1 T' + p_2 \rho', \quad (5.19)$$

где $\mathcal{E}_1$ и т. д. — символы производных по ρ_0 и T_0 . Выражая возмущения $\mathcal{E}'$ и ε' через ρ' и p' , в силу уравнения сплошности (1.15) [ср. вывод уравнения (1.16)] получим

$$p' = -\gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{s} - \kappa (\mathbf{s}, \operatorname{grad} p_0) + \frac{i\nu}{k} (\operatorname{div} \mathbf{H}' - \varepsilon'_0), \quad (5.20)$$

если ввести фактор e^{ikt} в возмущения. Величины γ, κ, ν суть

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \nu \left\{ 1 + \frac{\mathcal{E}_0}{p_0} - \frac{p_0}{p_0} \left(\mathcal{E}_2 - \frac{p_2}{p_1} \mathcal{E}_1 \right) + \frac{p_0}{p_0} \frac{1}{ik} \left(\varepsilon_2 - \frac{p_2}{p_1} \varepsilon_1 \right) \right\}, \\ \kappa &= \nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial p_0} + \left(\varepsilon_2 - \frac{p_2}{p_1} \varepsilon_1 \right) \frac{\partial p_0}{\partial p_0} \frac{1}{ik} - \left(\mathcal{E}_2 - \frac{p_2}{p_1} \mathcal{E}_1 \right) \frac{\partial p_0}{\partial p_0} \right\}, \\ \nu &= \left(\frac{\mathcal{E}_1}{p_1} - \frac{\varepsilon_1}{p_1} \frac{1}{ik} \right)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

если принять во внимание, что для всякой функции φ невозмущенного состояния $\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial p_0} \operatorname{grad} p_0$. * Исключая возмущение давления p' из уравнения малого движения (1.12) и уравнения энергии (5.20), в случае малых пульсаций получим [ср. вывод (1.33), (3.7) и М, § 1]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ \gamma p_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A) \right\} + \frac{d}{dr} \{ (1 - \kappa) \rho_0 g_0 A \} + \frac{4g_0}{r} \rho_0 A + k^2 \rho_0 A = \\ = \frac{\nu}{ik} \frac{d}{dr} (\varepsilon' - \operatorname{div} \mathbf{H}') - ik f_r, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где f_r — сила вязкости. Это есть общее уравнение малых пульсаций для всякой звезды. Входящие в (5.21) полная энергия и давление суть

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{R}{\mu} \rho_0 T_0 + a T_0^4 + J, \quad p_0 = \frac{R}{\mu} \rho_0 T_0 + \frac{1}{3} a T_0^4, \quad (5.23)$$

* Поверхности $\varphi = \text{const}$ суть поверхности $p_0 = \text{const}$ и суть сферы.

где μ — молекулярный вес, $\Gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплот газа, J — энергия возбуждения и ионизации. Известно, далее, что теплота, выделяемая при ядерных реакциях, весьма чувствительна к изменениям температуры и может быть грубо представлена формулой

$$\varepsilon = \varepsilon^0 T^m \rho^{n+1}; \quad (5.24)$$

например, для углеродного цикла $m \cong 17-18$, а $n=1$. Эти выражения (5.23) и (5.24) позволяют вычислить переменные коэффициенты γ , κ , ν . Легко убедиться, что всегда $\kappa=1$, а величина γ может быть представлена в виде $\gamma_t + \gamma_s$, где

$$\gamma_t = \frac{p_0}{p_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} - \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial T_0} \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T_0}} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial T_0} \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T_0}} \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{p_0} \right), \quad (5.25)$$

а величина

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \frac{1}{ik\varepsilon_1 - \varepsilon_1} \left\{ \varepsilon_1 \gamma_t + \frac{p_0}{p_0} (\varepsilon_2 p_1 - p_2 \varepsilon_1) \right\} = \\ &= \frac{1}{m - \frac{\beta + 12(\Gamma - 1)(1 - \beta)}{\Gamma - 1} \frac{ik p_0}{\varepsilon^0}} [m(\beta - \gamma_t) - \\ &- (n+1)(4-3\beta)] \equiv \frac{c}{b_1 - b_2 i \varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Таким образом, скорость колебаний $\gamma p_0/\rho_0$ будет зависеть от частоты, т. е. возникает „дисперсия волн“. Так как p_0/ε^0 очень велико (не менее 10^{10}), то этот эффект, вообще, незначителен, и практически (кроме случая бифуркации $k=0$) с точностью до величины ε^0/p_0 значение $\gamma = \gamma_t$, так что γ_s играет роль лишь малой поправки, делающей амплитуды пульсаций медленно и монотонно изменяющимися со временем (см. ниже). Только вблизи бифуркации $|\gamma_s|$ резко возрастает до величины порядка единицы, так что эта величина подобна δ -функции. Поэтому при $k \neq 0$ в первом приближении можно принять $\gamma = \gamma_t$ и вычислять частоты в этом приближении (скажем $k=k_0$), т. е. пренебрегая накоплением необратимого тепла внутри звезды при ее пульсациях. Точно так же члены с f_r и $\text{div } \mathbf{H}'$ в уравнении (5.22) создают затухание пульсаций благодаря вязкости и лучистому теплообмену в элементах вибрации и могут быть в первом приближении опущены, так же как и член с ε'_0 . Вообще, члены, делающие величину k комплексной, в первом приближении можно опустить, так как пульсации реальных звезд имеют весьма перманентный характер и не обнаруживают никаких сколько-нибудь заметных изменений периода и амплитуды на протяжении сотен лет (или, в среднем, на протяжении не менее 500 периодов), т. е. пульсации звезд протекают

„квази-адиабатическим“ образом так, что рассеяние энергии под действием диссипативных агентов почти полностью уравнивается накоплением тепла, благодаря действию субатомных источников.

Рассмотрим адиабатные пульсации стандартной звезды. Теория пульсаций Эддингтона, как известно, ведет к соотношению период — плотность [5]

$$P \sqrt{\rho_c} = 0.290 (3\gamma_t - 4)^{-1/2}, \quad (5.27)$$

которое дает, однако, слишком короткие периоды для цефеид, и только, искусственно понижая величину γ_t , можно добиться согласия с наблюдениями (при $\gamma_t < 1.40$). Для всякой газовой звезды, сводящейся к политропному шару индекса n , имеет место такая же формула, именно (3.2), причем период удлиняется при уменьшении концентрации массы к центру политропной звезды (ω_1 убывает с n). Отсюда Миллер [55] заключил, что у цефеид концентрация массы к центру ниже, чем у звезды Эддингтона ($n=3$), если не занижать γ_t , а принять $\gamma_t \cong 5/3$. Пайн и Гапошкин [56] недавно пытались вычислять индекс политропы n звезды из закона период — плотность. Росселанд [57] в своей Дарвиновской лекции пытается устранить эту трудность, считая пульсации ангармоническими, конечной амплитуды. Однако учет членов второго порядка при возмущениях, проводимый им в адиабатном приближении, едва ли является улучшением теории по существу, так как амплитуды, найденные из колебания лучевых скоростей, относятся к самым внешним слоям, где адиабатное приближение полностью нарушается. Кроме того, Росселанд получает слишком большие амплитуды, порядка $1/4$ радиуса звезды, тогда как наблюдения дают $1/12$.

При численном решении уравнения пульсаций (1.33) Эддингтон и Миллер использовали условие, что на границе звезды дилатация исчезает, что фактически не имеет места; дилатация здесь зависит от периода и амплитуды согласно формуле (1.35). Период свободных пульсаций задается колебанием всей массы звезды и надежнее может быть получен путем своеобразной интеграции по всей массе звезды. В этом случае он нечувствителен к граничным условиям, которые содержат слишком мало массы, чтобы повлиять на колебание основного тела звезды. Это обнаружено например Леду и Пекерисом [58], которые нашли, что вариационный метод ведет к лучшим результатам, чем обычный метод проб. Вычисления этих авторов дают для звезды Эддингтона постоянную в законе (5.27) 0.309 вместо 0.290.

Мы провели приближенные вычисления методом Ритца (§ 3) чисел λ' , входящих в формулу (3.2) (где $n=3$) для 15 различных значений γ_t , ограничиваясь вторым приближением и приняв значение λ'_2 при $\gamma_t = 4/3$ за абсолютную погрешность этого приближения. Это вычисление, согласно (2.33) и (3.5), потребовало только дополнительного вычисления некоторых интегралов к тем, которые были вычислены в § 2 (М, § 8).

Таким образом, наше вычисление дает закон период—плотность в виде

$$P\sqrt{\rho_c}=0.371(3\gamma_t-4)^{-1/2}, \quad (5.28)$$

вместо закона Эддингтона (5.27). Заметим, что дальнейшее повышение точности при применении способа Ритца приведет к еще большему значению постоянной. В табличке дано сопоставление периодов пульсаций δ Сери согласно формулам (5.27) и (5.28) для трех значений γ_t .

γ_t	$=5/3$	$15/9$	$14/9$
Эддингтон	3.15	3.75	4.60
Автор	4.03	4.56	5.88

Таким образом, уже при $\gamma_t=1.50$ мы находим согласие с наблюдениями, тогда как Эддингтон достигает этого при $\gamma_t=1.40-1.35$. Аналогичное согласие получается для остальных цефеид при значениях γ_t в пределах от $14/9$ до $15/9$, как следует из табл. 4. Мы считаем, что не имеет смысла требовать „лучшего“ согласия, так как величина γ_t статистической природы и определяется суперпозицией многих факторов таких, как сравнительная роль давления газа и излучения, химический состав и его распределение, ионизация, поляризация звездной материи (см. ниже). Совершенно невероятно, чтобы существовали звезды с одинаковым значением γ_t и лишь грубо в среднем результирующее действие упомянутых факторов проявляется одинаково, производя близкие значения γ_t .

Мы склонны заключить, что теория простых адиабатных пульсаций дает правильные периоды пульсаций цефеид, если основываться на модели Эддингтона. Предположение о меньшей концентрации масс в цефеидах, нежели в звезде Эддингтона (Миллер), лишено оснований. Физически индекс политропы n , характеризующий сжимаемость звездного газа, и величина γ зависят от одних и тех же факторов и не могут независимо друг от друга влиять на величину постоянной в законе период—плотность, как считают Миллер и некоторые другие авторы [59].*

Тот же метод Ритца позволяет вычислить распределение амплитуд внутри пульсирующей звезды, что было нами сделано для тех же значений γ_t . На рис. 4 даны относительные амплитуды пульсаций a/r нормированные так, что в центре $\frac{a}{r}=1$ (М, § 9). Пунктирные линии

* Например, для большинства звезд главной последовательности $\beta \cong 1$ и величина $\gamma_0=1+\frac{1}{n}=d \ln p_0/d \ln \rho_0=d \ln p_G/d \ln \rho_0$ для звезды, сводящейся к политропному шару (Миллер), имеет тот же смысл, что и γ_t (например, $\gamma_t=c_p/c_v$), зависящая также от распределения плотностей и температур и химического состава, см. ниже стр. 66.

ТАБЛИЦА 4

№	Звезда	Sp	T _{eff}	P _{набл} , (дни)	$\dot{R}$ (10 ⁶ км)	M ($\odot=1$)	1 - β	ρ_c	P _{вмч}	
									$\Gamma=1^{1/2}$	$\Gamma=1^{3/2}$
1	ICar	F ₈ -G ₉	4400	35.523	8.59	50.3	0.74	4.33·10 ⁻⁴	69.7	54.8
2	YOph	F ₅ -G ₃	5050	17.121	1.79	22.6	.62	2.88·10 ⁻³	21.9	17.4
3	XCyg	F ₅	5750	16.385	6.12	19.2	.60	7.13	13.7	10.7
4	ζGem	G ₀	4900	10.155	1.82	15.4	.56	4.96	15.6	13.6
5	S Sge	F ₄ -G ₃	5150	8.382	1.47	12.8	.52	8.94	11.1	8.63
6	W Sgr	A ₃ -G ₂	5750	7.594	1.93	10.9	.49	2.09·10 ⁻²	7.02	5.57
7	η Aql	A ₈ -G ₅	5500	7.176	1.77	10.7	.49	1.70	7.77	6.17
8	X Sgr	F ₁ -G ₅	5250	7.012	1.33	11.1	.49	1.31	8.87	7.03
9	Y Sgr	F ₄ -G ₄	5050	5.773	1.35	10.0	.47	1.34	8.62	6.63
10	δ Cep	F ₀ -G ₂	5550	5.366	1.27	8.8	.45	2.73	5.88	4.56
11	T Vul	A ₉ -G ₁	5750	4.435	0.966	7.7	.42	4.27·10 ⁻²	4.58	3.54
12	S UCy	A ₆ -F ₇	6450	3.845	0.709	6.8	.39	0.102	2.87	2.22
13	RT Aur	A ₇ -G ₁	5950	3.728	0.856	6.9	.39	0.0656	3.58	2.77
14	SZ Tau	A ₉ -G ₀	5850	3.148	0.460	6.6	.38	0.0591	3.45	2.67
15	SU Cas	A ₉ -F ₅	6350	1.950	0.295	5.3	.33	0.175	2.07	1.36
16	RR Lyr	B ₉ -F ₂	7800	0.567	0.166	3.7	.26	1.18	0.752	0.573
17	Polaris	F ₈	5250	3.968	0.165	7.8	.42	0.0267	5.80	4.48
18	β Cep	B ₁	19000	0.190	0.045	5.1	.33	37.3	0.142	0.152

суть решения Эддингтона. Мы отсюда видим, что фактически радиальные колебания звезды Эддингтона далеки от гомологичности, особенно при высоких значениях γ_t во внешних слоях, и только при $\gamma_t = 4/3$ эти движения гомологичны, что хорошо известно. Поэтому явление пульсаций можно рассматривать именно как результат того, что поглощение во внешних слоях не приспособляется к условиям равновесия, а осциллирует, то превышая, то падая ниже количества,

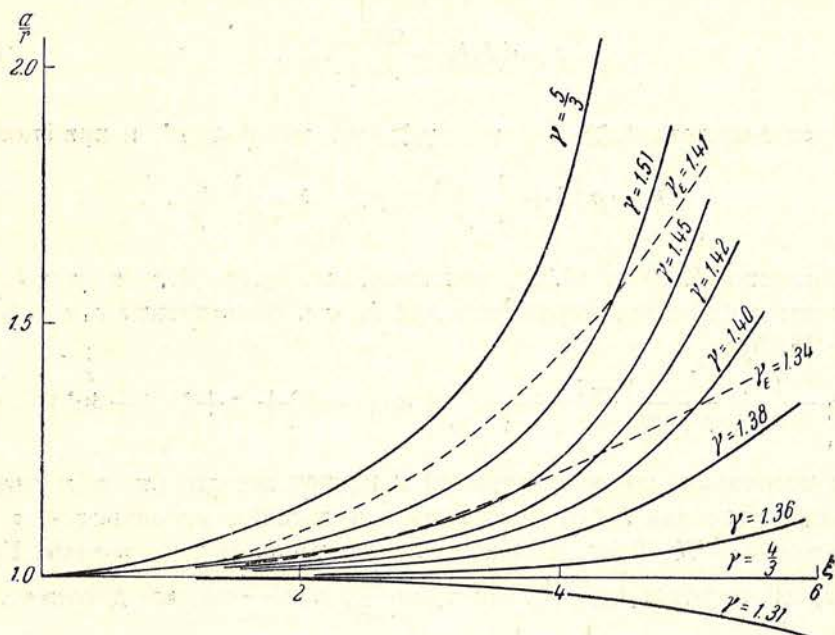


Рис. 4. Относительные амплитуды пульсаций

соответствующего состоянию равновесия. Однако амплитуда колебания во внешних слоях пульсирующей звезды должна выводиться из теории атмосфер таких звезд, и наши вычисления справедливы лишь для основной массы звезды, пульсирующей адиабатически.

Обратимся теперь к вопросу о вековом изменении пульсаций. Действие источников энергии делает величину γ комплексной (см. выше), и согласно (5.25) и (5.26) можно принять во втором приближении

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2,$$

$$\gamma_1 = \gamma_t + \frac{cb_1}{b_1^2 + b_0^2 k_0^2}, \quad \gamma_2 = \frac{ck_0 b_2}{b_1^2 + b_0^2 k_0^2}, \quad (5.29)$$

где k_0 — частота, вычисленная в адиабатном приближении ($\gamma_t > 4/3$). Частоты k во втором приближении можно оценить из равенства (2.32)

$$k^2 = \frac{4\pi\gamma\rho_c}{n+1} \gamma\lambda'_0, \quad (5.30)$$

где λ'_0 — фундаментальное число, вычисленное в первом приближении
 Полагая

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad k = k_1 + ik_2, \quad k^2 = p^2 + iq^2 \quad (5.31)$$

получим

$$p^2 = k_1^2 - k_2^2 = \frac{4\pi G \rho_c}{n+1} \lambda'_0 \gamma_1, \quad (5.32)$$

$$q^2 = 2k_1 k_2 = \frac{4\pi G' \rho_c}{n+1} \lambda'_0 \gamma_2. \quad (5.33)$$

Так как величина $b_2 \gg 1$ и $\gamma_1 \cong \gamma_t \gg \gamma_2$, то $q^2 \ll p^2$, и приближенно

$$k_1 = p \left(1 + \frac{1}{8} \frac{q^4}{p^4} \right) \cong p, \quad k_2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{p}. \quad (5.34)$$

Согласно (5.32) и (5.33), учитывая, что $\gamma_2 \cong c/b_2 k_0$ и $p \cong k_1 \cong k_0$, получим следующее выражение для k_2 [см. обозначения c и b_2 в формуле (5.26)]:

$$k_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_t} \frac{\Gamma - 1}{\beta + 12(\Gamma - 1)(1 - \beta)} \frac{\varepsilon^0}{p_0} \{ m(\gamma_t - \beta) + (n+1)(4 - 3\beta) \}. \quad (5.35)$$

Если источники концентрируются к центру звезды (m и n положительны), величина k_2 отрицательна и пульсации усиливаются в e -раз за время $\tau_s = 1/k_2$ благодаря накоплению тепла внутри звезды. Грубо, это время порядка $\bar{p}_0/\rho_m \in_m$, где $\in_m = \frac{L}{M}$, а $\bar{p}_0$ — среднее давление, т. е. это есть величина порядка 10^3 лет для карликов и 10^6 лет для гигантов, если концентрация источников (числа m и n) не слишком велика.

Рассмотрим теперь методом § 3 затухание пульсаций благодаря вязкости и проводимости. Обычная ламинарная вязкость, как отмечено в § 3, производит лишь ничтожное затухание; в то же время турбулентная вязкость может производить очень сильное затухание за время (грубо)

$$\tau_t \cong \frac{1}{\rho_m} \text{ лет.} \quad (5.36)$$

Радиятивная вязкость

$$\mu_R = \frac{2}{15} \frac{a T_0^4}{ck_0 \rho_0}, \quad (5.37)$$

согласно формуле Крамерса (5.6), и выражению для K согласно (5.14) будет [60]

$$\mu_R = \frac{2}{15} \frac{a \mu}{ck_1} \left[\frac{R/\mu}{\frac{1}{3} a} \frac{1 - \beta}{\beta} \right]^2 T_0^{3/2}, \quad (5.38)$$

так что (см. § 3)

$$\tau_R = \frac{15}{4} \frac{ck_1}{\mu \pi G \rho_c^{1/2} I_1(n, \gamma)} \left[\frac{1}{3} \frac{a}{R/\mu} \right]^{7/6} \frac{\beta^{7/6}}{(1-\beta)^{13/6}}. \quad (5.37)$$

По мере увеличения роли излучения ($\beta \rightarrow 0$) роль радиативной вязкости возрастает. Влияние излучения на величину газовой вязкости в стандартной звезде незначительно, и простое вычисление методом § 3 дает

$$\tau_G = \frac{9}{4} \frac{\kappa^{2/3}}{G} I(n, \gamma) \left[\frac{(R/\mu)^4}{\frac{1}{3} a} \right]^{1/6} \frac{m}{\sigma^2} \frac{1}{\rho_c^{1/6}} \frac{\beta^{2/3}}{(1-\beta)^{1/6}}. \quad (5.38)$$

Для большинства звезд отношение

$$\frac{\tau_R}{\tau_G} \cong 10^{-8} \rho_m^{-1/6} \frac{\beta^{11/6}}{(1-\beta)^{7/6}}$$

является величиной порядка 10^{-8} и лишь для звезд, у которых давление радиации $\sim 0.01\%$ от полного давления, роль газовой вязкости сравнима с той же радиативной. Таким образом, для звезд с массой более $\frac{1}{10} \odot$ затухание благодаря газовой вязкости пренебрежимо по сравнению с эффектом радиативной вязкости. Что касается этого последнего эффекта, то он ведет к затуханию за сроки порядка 10^9 — 10^{10} лет.

Затухание пульсаций стандартной звезды благодаря лучистой проводимости рассмотрено Росселандом посредством метода, подобного данному в § 3 [61]. Он вывел следующее приближенное выражение для времени затухания:

$$\tau_H = \frac{2}{5} \frac{k_0^2 a^2}{\nu_t} \frac{M}{L} \frac{1 - \frac{3}{4} \beta}{3\gamma - 4} = \frac{2}{5} \pi G \omega_1 \rho_m \frac{Ma^2}{L} \psi^{-1}, \quad (5.39)$$

где $\nu_t = p_1 / \mathcal{C}_1$ [см. (5.21)], а ψ — безразмерная положительная функция, которая в большинстве случаев порядка единицы.* Таким образом, мы получаем следующую картину затухания пульсаций:

	Гиганты		Карлики	
Газовая вязкость τ_G	10^{15}	лет	10^{11}	лет
Лучевая вязкость τ_R	10^{10}	„	10^{12}	„
Радиативная проводимость τ_H	10^4 — 10^5	„	10^6	„
Турбулентная вязкость τ_t	10^3 — 10^4	„	1—10	„

* $\psi = \frac{(3\gamma - 4) \nu_t}{\gamma \left(1 - \frac{3}{4} \beta\right) \lambda}$ согласно формуле (2.32).

Например, для δ Cep, построенной по модели Эддингтона, мы получаем $\tau_H = 8.5 \cdot 10^5$ лет, а $\tau_t \cong 10^4$ лет. Таким образом, решающую роль в затухании пульсаций, повидимому, играет турбулентная вязкость, насколько позволяют судить о роли этого фактора современные представления о турбулентности. Формула (5.36) показывает, что в звездах, более плотных, следовательно, с коротким периодом пульсаций, затухание пульсаций происходит интенсивнее, нежели в диффузных звездах долгого периода. Таким образом, каково бы ни было начальное распределение амплитуд у всех пульсирующих звезд, по истечении 10^4 — 10^5 лет, или несколько более, оно будет показывать статистическую зависимость от периода, если таковой не изменяется заметным образом за эти сроки. Изменения периода противоположного знака и порядка нескольких секунд в столетие у δ Cep и η Aql говорят в пользу последнего предположения и свидетельствуют скорее о случайных флуктуациях периода. Хотя мы не имеем достоверных сведений о затухании колебаний размеров у цефеид, все же невероятно, чтобы затухание было столь сильным, так как оно сопровождалось бы столь же сильным затуханием колебаний температуры фотосферы T_e и яркости звезды (благодаря соотношению Блексли $aT_e = \text{const}$). Поэтому должен существовать механизм, поддерживающий пульсации и производящий меньшее затухание или даже усиление пульсаций, если только изменения амплитуды на 0,1 в столетие у цефеид признать нереальными.

Следовательно, у цефеид в настоящее время должно приблизительно выполняться условие $\tau_e = \tau_t + \tau_H$, при котором пульсации сохраняют перманентный характер. Согласно (5.35) это условие будет

$$m(\gamma_t - \beta) + (n+1)(4-3\beta) = \\ = \delta \equiv 2\gamma_t \frac{\bar{p}_0}{\zeta_m \varrho_m} \frac{\beta + 12(\Gamma-1)(1-\beta)}{\Gamma-1} \left(\frac{1}{\tau_t} + \frac{1}{\tau_H} \right) \quad (5.40)$$

и если левая часть превышает δ , то наступает вековая неустойчивость. Используя данные Эддингтона для δ Cep, * мы находим (пренебрегая $1/\tau_H$ по сравнению с $1/\tau_t$)

$$m + 2.88(n+1) = 3.82 \cdot 10^3.$$

Если мы даже переоцениваем роль турбулентной вязкости и основная роль принадлежит лучистой проводимости, то условие перманентных пульсаций будет

$$m + 2.88(n+1) = 140.$$

При γ_t , отличном от $4/3$, для поддержания пульсаций требуется весьма сильная концентрация источников энергии к центру звезды. По оценкам

* I. A. S., k. VII, § 105: $\gamma_t = 1.40$, $\beta = 0.55$, $\Gamma = 5/3$, $\bar{p}_0 = 4 \cdot 10^{11}$, $\varrho_m = 3.42 \cdot 10^{-4}$, $P = 4.64 \cdot 10^5$

Коулинга [62] для поддержания пульсаций должно быть $m+3(n+1) \cong \cong 450$ (если $\beta \cong 1$), а согласно Клювер [63] $m+3(n+1)=780$, в отличие от условия Эддингтона [64] $m+3(n+1)=2$. Таким образом поддержание пульсаций требует весьма сильной концентрации источников к центру звезды, если, однако, величина γ_t заметно отличается от $4/3$. Но, по мере того как γ_t приближается к $4/3$ ($\lambda_1 \rightarrow 0$), перманентные пульсации требуют все более и более низкой концентрации источников. Наконец, когда γ_t упадет до значения $4/3$ ($k_0=0, k_2=O(k_0^2)$), наступает нейтральное равновесие звезды, которое согласно формулам (5.29) или (5.26) сохранится, если только

$$m+3(n+1)=0, \quad (5.41)$$

т. е. когда источники распределены равномерно. Следовательно, чем ближе γ к $4/3$, тем меньше должна быть концентрация источников к центру для того, чтобы звезда сохранила вековую устойчивость или способность к перманентным пульсациям. На это обстоятельство впервые обратил внимание Фогт [65]. Вековая неустойчивость в рассматриваемом случае раньше всего наступает для колебания самого долгого периода ($k \cong 0$).

У звезд с $\gamma_t < 4/3$ возникает „взрывная“ неустойчивость ($k_0^2 < 0$), которая может быть задержана при некоторых условиях благодаря совместному действию диссипативных агентов и источников энергии. Для большинства звезд карликов и главной последовательности роль радиации не велика, и для таких звезд условие (3.18) есть условие временной устойчивости. Для массивных звезд с $\gamma_t < 4/3$ задержка неустойчивости может быть произведена благодаря радиативной проводимости ($\tau_H < 1/|k_0|$) при условии, что

$$\rho_m < \rho_{\text{crit}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi G \omega_1}} \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma_t |\lambda'|}} \left[\frac{5}{2} \psi \frac{L}{Ma^2} \right]^{2/3} \equiv c'(\gamma) M^{2/3}, \quad (5.42)$$

если исключить в (5.39) радиус через массу M и среднюю плотность ρ_m и использовать затем зависимость масса—светимость в упрощенном виде $L \sim M^3$. Только для массивных звезд ($M > 10 \odot$) значение ρ_{crit} достигает величин порядка 10^{-6} , т. е. того же порядка, что и ρ_{crit} в формуле (3.18).*

Таким образом, устойчивость состояния равновесия звезд целиком управляется величиной γ_t , вычисление которой есть очень сложная и важная проблема астрофизики. Результаты подобных вычислений, проведенных Фаулером и Гуггенхеймом [66], Бирманом [67] и др., могут быть суммированы следующим образом. 1) Величина γ_t меняется нерегулярно от случая к случаю, возрастая в среднем с увеличением

* При вычислении мы принимаем $|\lambda'| \approx 10^{-4}$ (см. § 3), что соответствует отклонению γ_t на 0.5% от критической величины $4/3$.

плотности и температуры; в большинстве случаев γ_t превышает $4/3$ и в основном группируется в пределах от $1^{4/9}$ до $1^{5/9}$ (с отклонениями до 1.4 и $5/3$ в отдельных случаях). 2) Для каждого химического элемента γ_t резко падает, как только плотность и температура достигают значений, соответствующих середине стадии ионизации сперва L -оболочки, затем K -оболочки атомов. При этом γ_t может упасть ниже значения $4/3$, например, при ионизации M -оболочки для серебра и L -оболочки для элементов меньшего атомного номера (для Br_{35} , $\gamma_t = 1.28$; для Zn_{30} , $\gamma_t = 1.30$). 3) Исключая случаи L - и K -ионизации, значения γ_t практически не отличаются от тех значений, которые соответствуют случаю недиссоциированного идеального газа [в пренебрежении энергией J в формуле (5.23)] при молекулярном весе, равном среднему молекулярному весу звезды. В этом последнем случае коэффициенты γ_t и ν_t , как известно, суть

$$\gamma_t = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\Gamma - 1)}{\beta + 12(\Gamma - 1)(1 - \beta)}, \quad \nu_t = \frac{(4 - 3\beta)(\Gamma - 1)}{\beta + 12(\Gamma - 1)(1 - \beta)}, \quad (5.43)$$

что без труда может быть получено из формул (5.21) и (5.25).

Эта величина γ_t меняется от $4/3$ (чистое излучение) до значения $\gamma_t = \Gamma$ (чистый газ); соответственно ν_t изменяется от $1/3$ до $\Gamma - 1$. Кроме того, как обнаружили Коулинг и Бирман [68], на величину γ_t существенно влияет содержание водорода X и при неизменном X величина γ_t убывает по мере возрастания массы звезды, достигая $4/3$ и падая ниже этого числа. Они же нашли, что у диффузных звезд с радиусом выше 30—100 радиусов Солнца (в зависимости от массы) устойчивость сохраняется ($\gamma_t > 4/3$) только при достаточной примеси водорода.

Обратимся теперь к диаграмме 3, которая должна быть несколько модифицирована. Так как только что упомянутые результаты вычислений γ_t , а также наши соображения в конце § 3, показывают, что величина γ_t грубо, в среднем, возрастает с ростом средней плотности ρ_m и средней температуры T_m и будет несколько больше у звезд меньшей массы, нежели у звезд большей массы (при прочих равных условиях), т. е. γ_t , в среднем, возрастает вдоль биссектрисы координатного угла (ρ_m, M). В левом верхнем углу диаграммы 4 статистически будут преобладать звезды с $\gamma_t < 4/3$, а в противоположном углу те, для которых $\gamma_t > 4/3$. Крайне трудно, конечно, точно локализовать область значений $\gamma_t = 4/3$, если это вообще возможно сделать из-за статистической природы этой величины. Кривая $\rho_m = \rho_{\text{crit}}$, сохраняет свое расположение, но появится в области больших масс также кривая $\rho_m = \rho'_{\text{crit}}$, отделяющая область задержки неустойчивости благодаря лучистой проводимости (5.42). Звезды с $\gamma_t < 4/3$, лежащие выше этих кривых, могут быть устойчивы временно, если концентрация источников не слишком высока. Если принять во внимание, что для

звезд с массой в пределах от массы Солнца до $10-50 \odot$ величина ρ_{crit} лежит в пределах от 10^{-4} до 10^{-6} , а ρ'_{crit} достигает значений не более 10^{-5} , то место $\gamma_t \cong 4/3$ должно располагаться под этими кривыми $\rho_m = \rho_{crit}$, так как при таких плотностях значения γ_t , как правило, ниже $4/3$ согласно расчетам Фаулера*. Кривые постоянной средней температуры

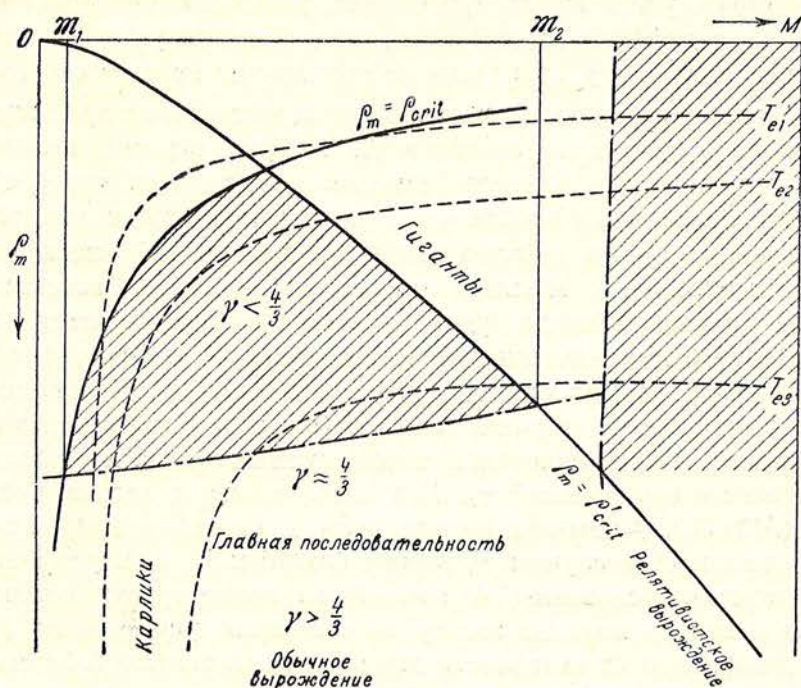


Рис. 5. Диаграмма устойчивости звезд

будут располагаться так же, как на рис. 3 и мы их не приводим, но приведем кривые постоянной эффективной температуры, которая, как известно, для стандартных звезд определяется формулой [69]

$$\rho_m \propto (1 - \beta)^{-9/4} M^{-11/10} T_{eff}^{24/5}.$$

Чем ниже T_{eff} , тем ближе кривая $T_{eff} = \text{const}$ к началу координат (пунктирные кривые). Таким образом, в грубых чертах заштрихованная область есть область наибольшей неустойчивости. Мы видим, как и в § 3, что могут существовать два класса звезд при одной и той же достаточно низкой эффективной температуре: диффузные гиганты большой массы (в правом верхнем углу диаграммы) и плот-

* Например [66], для стандартной звезды-гиганта уже при плотности 0,001 мы имеем следующие значения γ :

Fe 26	Zn 30	Ag 47
1.295	1.50	1.30,

так что, приняв изобилие этих элементов таким же, как для Солнца, мы получим в среднем для γ значение 1.33.

ные карлики (в левом нижнем углу). По мере возрастания T_{eff} область наибольшей неустойчивости, разделяющая эти классы звезд, сокращается и исчезает. Звезды весьма малой массы ($M < M_1$) всегда устойчивы, излучение в них играет ничтожную роль, и они могут сжиматься или расширяться без потери устойчивости. Звезды большей массы ($M > M_1$) могут потерять устойчивость при сжатии, равно как при расширении. Сжимаясь от диффузного состояния, звезда может ускорить сжатие, достигнув значения ρ_{crit} ; в процессе расширения от плотного состояния, напротив, у звезды возникнет тенденция рассеяться в пространстве, коль скоро γ_t упадет до значения $4/3$. В обоих случаях появляется один и тот же механизм неустойчивости, действующий при $\gamma_t < 4/3$ и связанный с тем, что большая часть энергии при сжатии или расширении превращается в энергию ионизации или рекомбинации, например, L -электронов, а меньшая часть не в состоянии восстановить прежнее состояние. Звезда будет сжиматься или расширяться до тех пор, пока не будут потеряны или восстановлены все L -электроны [70]. Идет ли эволюция таких звезд от диффузного или от плотного состояния, все равно процесс сгорания водорода (при неизменной массе звезды) благоприятствует возникновению такой неустойчивости, поскольку при этом процессе понижается* γ_t . Что касается звезд весьма большой массы ($M \geq M_2$), у которых велика роль давления радиации, то для них в большинстве случаев γ_t весьма близко к $4/3$, и их устойчивость крайне стеснена условием (5.41): малейшая концентрация источников энергии к центру выводит звезду из состояния устойчивого равновесия, независимо от активности диссипативных агентов (область неустойчивости в правой части диаграммы).

В намеченной нами диаграмме учтено совместное действие только эффективной сжимаемости γ_t и диссипативных агентов. Дестабилизирующее действие источников энергии может несколько расширить область неустойчивости. Трудно пока исследовать этот эффект. Но некоторые сведения можно получить для политропных звезд, в которых энергия производится ядерными реакциями. Для этого достаточно сравнить действие этого источника с диссипативным действием так, как это было сделано выше при рассмотрении перманентных пуль-

* Нижеследующая табличка дает „отрицательный“ запас устойчивости λ' и время изменения амплитуды в e -раз (в днях) для значений γ , несколько меньших $4/3$, и для двух типичных значений средней плотности:

γ	λ'	$\rho_m = 10^{-4}$	$\rho_m = 10^{-5}$
$4/3$	0	∞	∞
1.32	$-0.95 \cdot 10^{-3}$	259 ^d	2590 ^d
1.31	$-1.85 \cdot 10^{-3}$	186	1860
1.30	$-2.50 \cdot 10^{-3}$	161	1610

Таким образом, неустойчивость уже при значениях γ на несколько сотых ниже критического, скорее „взрывного“ характера, нежели векового, если не учитывать действия диссипативных агентов.

саций. Для ядерных реакций выделение энергии на грамм есть

$$\varepsilon \sim \frac{\rho_0}{T_0^{2/3}} e^{-A/T^{1/3}} \quad (5.44)$$

(формула Аткинсона), и γ_s принимает тот же вид (5.26), где $n=1$, а на место m встает функция

$$\left. \begin{aligned} \varphi(T_0) &= \frac{1}{3} \left(-2 + \frac{A}{T_0^{1/3}} \right), \\ A &= \left[(Z_1 Z_2)^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \right]^{1/3} 42.7, \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

где

если T_0 измерено в единицах 10^6 К. Здесь Z и A с индексами — заряд и атомный вес ядер, участвующих в реакции [71]. Условие устойчивости $\tau_e < \tau_t + \tau_H$ будет [ср. (5.40)]

$$\frac{A}{T_m^{1/3}} < 2 + 3\delta', \quad \delta' \equiv \frac{\delta - 2(4 - 3\beta)}{\gamma_t - \beta}, \quad (5.46)$$

где δ определяется формулой (5.40), а T_m — средняя температура звезды. Согласно (5.45) в устойчивой звезде возможно выделение энергии путем преобразования протоном ($Z_1=1$, $A_1=1$) только тех элементов, для которых

$$Z_2 < \sqrt{\frac{A_2 + 1}{A_2} T_m} Z_0; \quad Z_0 \equiv \left[\frac{2 + 3\delta'}{42.7} \right]^{3/2}. \quad (5.47)$$

Выделение энергии при образовании ядер, более тяжелых, чем $\cong Z_0 \sqrt{T_m}$, приводит всякую звезду к неустойчивости. У большинства звезд турбулентное рассеяние энергии, как показывают выше наши оценки, достаточно эффективно ($\delta' \cong \delta \cong 10^3$), чтобы могли протекать любые ядерные реакции без нарушения устойчивости звезды. Если мы даже и переоценили роль турбулентного рассеяния, то при лучистом рассеянии δ' будет порядка 100 и Z_0 — порядка 19, т. е. атомного номера калия, так как величина средней температуры не превышает $2 \cdot 10^7$ °К для стандартной звезды. Поэтому и в этом случае с устойчивостью совместимы все виды ядерных реакций вплоть до серебра (если таковые и были бы возможны). Однако для достаточно массивных звезд ($\gamma_t \rightarrow 4/3$ и δ падает) только реакции с легкими элементами совместимы с вековой устойчивостью звезды, которую вообще невозможно обеспечить при

$$\delta < 2(4 - 3\beta) - \frac{2}{3}(\gamma_t - \beta) \cong 6.22 \dots,$$

(если положить $\beta \cong 0$, $\gamma_t \cong 4/3$). Поэтому слишком массивные звезды, как правило, неустойчивы и рассеиваются в пространстве* (заштрихо-

* Это сразу видно из формулы (5.41), где $m=\varphi$, $n=1$, или из (5.46) также, где $\delta=0$.

ванная правая часть диаграммы). С другой стороны, наш анализ показывает, что формирование тяжелых элементов путем ядерных реакций не могло бы происходить в устойчивых массивных звездах (если они целиком газовые).

Что касается газовых звезд, строение которых уклоняется от стандартной звезды, то специальный анализ, выполненный нами [72], показывает, что любая газовая звезда устойчива, если [см. (5.11)] произведение $\bar{\kappa}\eta$ не возрастает вглубь звезды, и неустойчива, если это величина растет быстрее, чем полное давление p_0 . Поэтому кажется резонным считать стандартную звезду пригодной для установления более широкого класса устойчивых звезд, чем имеется таковых в природе ($\bar{\kappa}\eta$ не убывает к центру). Это означает, что область неустойчивости на диаграмме должна быть несколько расширена. К расширению этой области должен привести также эффект медленного вращения.

Отклонения от газового состояния могут быть легко учтены в случае полного вырождения, когда звезда сводится к политропному шару с индексом $n=3/2$ или $n=3$ (релятивистское вырождение). Как мы показали ранее [14], белые карлики устойчивы в случае обычного вырождения и находятся в нейтральном равновесии в случае релятивистского вырождения. Состояние обычного вырождения энергетически более выгодно, нежели релятивистского вырождения. Поэтому гипотеза о релятивистском вырождении в белых карликах вряд ли оправдана, так как состояние минимума энергии при сжатии до плотностей белых карликов достигается до наступления релятивистских эффектов. Периоды свободных пульсаций таких звезд весьма малы и порядка 10 сек. при средней плотности $\sim 10^6$ г/см³. Эти звезды ориентировочно показаны в нижней части диаграммы.

Наша диаграмма устойчивости не претендует на полное истолкование фактического распределения звезд на диаграмме Герцшпрунга — Ресселя; она дает возможное объяснение лишь основного статистического факта деления звезд на гигантов и карликов. В области наибольшей неустойчивости, разделяющей эти две группы звезд, могли бы встречаться устойчивые газовые звезды, если изобилие водорода в них было бы велико ($\gamma_i > 4/3$). Однако, согласно Стремгрену [73], содержание водорода тем меньше, чем меньше масса и больше радиус звезды, так что невероятно ожидать больших значений γ_i в заштрихованной области. Мы склонны думать поэтому, что эволюция звезд промежуточной массы (между M_1 и M_2) неизбежно связана с потерей устойчивости, если только содержание водорода убывает. Табличка в сноске на стр. 58 показывает, что коллапс может длиться несколько дней при плотностях порядка 0.1. Это ведет к массе „новой“ звезды от 10 до 10² масс Солнца, если явление Новой связано с рассмотренной неустойчивостью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение устойчивости проведено методами теории малых колебаний (вариационные методы и теоремы сравнения). Устойчивость газовых сфер и звезд регулируется тремя факторами: химическим составом (фиксирующим γ), способом образования энергии и способностью рассеивать энергию. Первый фактор вызывает неустойчивость при $\gamma < 4/3$; при $\gamma > 4/3$ звезда устойчива и способна пульсировать гармонически. Диссипативные силы (основные из них — турбулентное и радиативное трение) стабилизируют звезду: они делают пульсации затухающими (при $\gamma > 4/3$) или задерживают (замедляют) неустойчивость (при $\gamma < 4/3$), если средняя плотность звезды не превышает некоторого критического количества, зависящего, в основном, от массы звезды. Активность источников энергии действует против устойчивости. У звезд не слишком большой массы рассеяние энергии на много превышает накопление избыточного тепла от ядерных реакций. Но в весьма массивных звездах ($\beta \rightarrow 0$) это не имеет места, и всякий способ образования энергии вызывает их неустойчивость. В устойчивых звездах большой массы возможны только ядерные реакции с легкими элементами, тогда как в обычных звездах нет таких ограничений для устойчивости. На основе учета этих трех факторов построена диаграмма устойчивости для конфигураций газовой звезды. При весьма малых массах все газовые звезды оказываются устойчивыми. По мере роста массы возникают два отдельных класса звезд одинаковой эффективной (и средней) температуры: диффузные, больших размеров ($\gamma < 4/3$, $\rho_m < \rho_{crit}$), и плотные, малых размеров ($\gamma > 4/3$); оба класса разделяет область наибольшей неустойчивости, которая исчезает по мере дальнейшего роста массы и температуры. Переход через эту область в процессе контракционной эволюции (сжатие или расширение) звезды приводит ее к коллапсу. Белые карлики образуют наиболее выгодные с энергетической точки зрения конфигурации звездной массы. При достаточно больших массах, однако, вновь появляется область неустойчивости, возникающая от действия источников энергии. Предложенная диаграмма устойчивости, возможно, объясняет основной факт диаграммы Герцшпрунга — Ресселя — разделение звезд на гигантов и карликов, а также факт ограничения звездных масс сверху. Сравнительно малое обилие гигантских звезд поздних классов в галактике и кратковременность их эволюции, возможно, свидетельствуют в пользу нашего представления о временной устойчивости этих звезд.

Для газовых сфер Эмдена вычислены частоты свободных пульсаций и установлен закон период — плотность. Вновь рассмотрена теория пульсаций звезд и вычислен закон период — плотность для пульсирующей стандартной звезды, показывающий лучшее согласие с наблюдениями, чем теоретические законы Эддингтона и Леду и Пекериса. Распределение амплитуд в пульсирующих звездах показывает замет-

ное отклонение от гомологичности; гомологичные сжатия или расширения в звездах крайне маловероятны. Турбулентное затухание пульсаций, грубо, обратно пропорциональной средней плотности, поэтому звезды короткого периода статистически обладают меньшей амплитудой. Такое соотношение период — амплитуда установилось, вероятно, в начальной стадии развития цефеид. Современное состояние практически перманентных пульсаций цефеид допускает очень высокую концентрацию источников энергии к центру звезды и, в частности, ту, которая создается при ядерных реакциях (формула Аткинсона).

Разработанный строгий метод для изучения нерадиальных колебаний газовых шаров приводит к интересному факту существования нейтрального равновесия шаров Эмдена относительно сферически-гармонической вибрации первого порядка. Обнаружено аналитически, что медленное вращение массы приводит ее к неустойчивости относительно такого колебания. Развитие этой неустойчивости у вращающейся газовой сферы, возможно, приводит к образованию тесной двойной системы.

Москва

Ноябрь, 1945

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 1. Уравнение пульсаций

В силу (1.26), (1.28) и (1.19) уравнение для конденсации (1.23) в случае $l=0$ будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d}{dr} \gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right\} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) + (k^2 + 4\pi G \rho_0) B' = \\ = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{dU_0}{dr} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r B' \rho_0 r^2 dr, \end{aligned} \quad (\text{M } 1.1)$$

тогда как уравнение Пуассона (1.13) и уравнение сплошности (1.15) будут

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_0}{dr} \right) = -4\pi G \rho_0 B', \quad (\text{M } 1.2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) = -\rho_0 B'. \quad (\text{M } 1.3)$$

Исключая отсюда $\rho_0 B'$, получим

$$\frac{dU_0}{dr} = 4\pi G \rho_0 A, \quad (\text{M } 1.4)$$

считая A и $\frac{dU_0}{dr}$ повсюду конечными внутри шара. Подставив $\frac{dU_0}{dr}$ из (M 1.4) в (M 1.1), получим после некоторых преобразований

$$-k^2 \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) = 4\pi G \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \rho_0 \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) \right\},$$

откуда при том же условии, что возмущения конечны при $r=0$, получим

$$-k^2 A = 4\pi G \rho_0 A - \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right). \quad (\text{M } 1.5)$$

Исключив B' отсюда и из уравнения сплошности (М1.3), получим уравнение (1.32). В силу условия равновесия (1.6) уравнение (М1.5) можно записать в виде

$$-k^2 \rho_0 A = 4\pi G \rho_0^2 A - g_0 \rho_0 B' - \frac{dp_0}{dr} B' - \rho_0 \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right). \quad (\text{М } 1.6)$$

Но

$$\frac{d}{dr} \left(\rho_0 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) = \rho_0 \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} B'.$$

Следовательно, подставив из (М1.3) значение $\rho_0 B'$ в (М1.6) и заметив, что $\frac{dp_0}{dr} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr}$, получим

$$\begin{aligned} -k^2 \rho_0 A &= 4\pi G \rho_0^2 A + g_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) - \frac{d}{dr} \left(\rho_0 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) = \\ &= 4\pi G \rho_0^2 A + g_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) - \frac{d}{dr} (\rho_0 g_0 A) + \\ &+ \frac{d}{dr} \left(\rho_0 g_0 A - \rho_0 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right). \end{aligned} \quad (\text{М } 1.7)$$

В силу (М1.3) последний член будет

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\rho_0 g_0 A - \rho_0 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) &= \frac{d}{dr} \left(-\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} A - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho_0 B' \right) = \\ &= \frac{d}{dr} \left\{ \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left[-\frac{d\rho_0}{dr} A + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) \right] \right\} = \\ &= \frac{d}{dr} \left\{ \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{М } 1.8)$$

Далее, в силу уравнения Пуассона

$$\frac{dg_0}{dr} + \frac{2}{r} g_0 = 4\pi G \rho_0$$

имеем

$$\frac{d}{dr} (g_0 \rho_0 A) = \rho_0 A \left(4\pi G \rho_0 - \frac{2}{r} g_0 \right) + g_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 A) - \frac{2}{r} g_0 \rho_0 A. \quad (\text{М } 1.9)$$

Используя (М1.8) и (М1.9), уравнение (М1.7) сводится к уравнению пульсаций (1.33). Полагая в этом уравнении

$$\eta = \frac{A}{r}, \quad (\text{М } 1.10)$$

мы приходим к основному уравнению теории пульсаций Эддингтона [5]

$$\frac{d^2 \eta}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} - \frac{g_0 \rho_0}{p_0} \right) \frac{d\eta}{dr} + \left(\frac{4}{\gamma} - 3 \right) \frac{g_0 \rho_0}{r p_0} \eta = -\frac{\rho_0}{\gamma p_0} k^2 \eta. \quad (\text{М } 1.11)$$

§ 2. Математическая природа краевой задачи о пульсациях шаров Эмдена

Для изучения математической природы задачи введем переменные Эмдена (2.1) в уравнение пульсаций (1.33) и преобразуем его к новым переменным с помощью преобразования Штурма [74]

$$u = r \sqrt[4]{\gamma p_0 \rho_0} A = \sqrt[4]{\frac{[K(n+1)]^3}{(4\pi G)^2}} \rho_c^{3/n} \xi \theta^{(2n+1)/4} A, \quad (\text{М } 2.1)$$

$$x = \sqrt[4]{4\pi G \rho_c} \int_0^r \sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}} dr = \sqrt{n} \int_0^\xi \frac{d\xi}{V\theta}. \quad (\text{М } 2.2)$$

Это преобразование позволяет „ослабить“ особенность, связанную с исчезновением плотности на границе шара и полезно также для повышения точности в вычислениях периодов пульсаций (см. М, § 3). Проводя несколько кропотливые вычисления и используя при этом уравнение Эмдена (2.2), вместо уравнения пульсаций (1.33) получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - q_1 u + \lambda_1 u = 0, \quad \lambda_1 = \frac{k^2}{4\pi G \rho_c}, \quad (\text{М } 2.3)$$

где

$$q_1 = \frac{1}{n} \left\{ \frac{2}{\xi^2} \theta + \frac{4n^2-1}{16} \frac{\theta'^2}{\theta} - \frac{4n-3}{2} \left(-\frac{\theta'}{\xi} \right) - \frac{2n+1}{4} \theta^n \right\}. \quad (\text{М } 2.4)$$

Согласно формуле (а) (примечание к стр. 16), мы имеем

$$\text{при } \xi \rightarrow 0, \quad x = \sqrt{n} \xi + O(\xi^2).$$

Но так как $\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(-\frac{\theta'}{\xi} \right) = 1/3$, $\theta(0) = 1$, то

$$\text{при } x \rightarrow 0, \quad q_1 = \frac{2}{x^2} + O(1), \quad (\text{М } 2.5)$$

т. е. коэффициент q_1 имеет особенность при $x=0$ типа особенности уравнения Бесселя. Ее появление вызвано полярной системой координат. Фундаментальное уравнение имеет корни $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-1$, следовательно, решение должно удовлетворять условию

$$\text{при } x \rightarrow 0, \quad u(x) = O(x^2). \quad (\text{М } 2.6)$$

Рассмотрим теперь поведение u на границе шара. Согласно формуле (b) (ссылка на стр. 16) при всяком ξ_0 существует число

$$x_0 = \sqrt{n} \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{V\theta}, \quad (\text{М } 2.7)$$

фиксирующее границу шара. В силу той же формулы (b) мы имеем

$$\text{при } \xi \rightarrow \xi_0, \quad x_0 - x \cong 2 \sqrt{\frac{n}{-\theta_0}} V \sqrt{\xi_0 - \xi},$$

и, следовательно,

$$\text{при } \xi \rightarrow \xi_0, \quad \theta \cong \frac{\theta_0^2}{4n} (x_0 - x)^2,$$

так что при $\xi \rightarrow \xi_0$ коэффициент

$$q_1 \cong \frac{4n^2 - 1}{4} \frac{1}{(x_0 - x)^2}, \quad (\text{M } 2.8)$$

т. е. благодаря исчезанию плотности уравнение пульсаций имеет особую точку также на внешней границе. Корни фундаментального уравнения суть $(2n + 1)/2$, $(-2n + 1)/2$, поэтому решение на внешней границе должно удовлетворять условию

$$\text{при } x \rightarrow x_0, \quad u(x) = O[(x_0 - x)^{(2n+1)/2}]. \quad (\text{M } 2.9)$$

Такое поведение решения действительно удовлетворяет условию (1.35), как показывает простая подстановка.

Вычисление коэффициента q_1 с помощью таблиц Эмдена (см. М, §3) показывает, что при любом $n \geq 1/2$ он достигает наименьшего (ограниченного) значения в интервале $(0, x_0)$. На рис. 2 показаны графики этой функции для пяти значений $n = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$.

Таким образом, мы приходим к краевой задаче Штурма—Лиувилля

$$\left. \begin{aligned} u'' - q_1 u + \lambda_1 u &= 0, \\ u(0) = u(x_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{M } 2.10)$$

с регулярными особенностями на концах интервала $(0, x_0)$. Нам неизвестно, чтобы где-либо рассматривался вопрос о существовании решений краевой задачи с особенностями рассмотренного типа, поэтому мы не могли ограничиться ссылкой на уже имеющийся результат.* Вопрос о разрешимости поставленной задачи сводится к доказательству существования функции, дающей интегралу

$$D[u] = \int_0^{x_0} (u'^2 + q_1 u^2) dx \quad (\text{M } 2.11)$$

минимум при условиях

$$u(0) = u(x_0) = 0 \quad (\text{M } 2.12)$$

и при условии нормировки [77]

$$H[u] = \int_0^{x_0} u^2 dx = 1. \quad (\text{M } 2.13)$$

* В работах Вейля [75] и Хильба [76] речь идет об уравнениях с особенностями другого типа. Курант в VI главе «Методов математической физики» распространяет свою вариационную теорию на уравнения, имеющие особые точки вида $1/x^2$ на одном из концов интервала, не приводя при этом строгой аргументации возможности такого обобщения.

Мы проведем доказательство существования такой функции прямым методом Ритца, выбрав минимизирующую последовательность функции u_m , которая равномерно сходится к некоторой функции u , являющейся решением задачи (М 2.10), причем—единственным решением. В качестве такой последовательности выберем функции вида

$$u_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k(x); \quad m=1, 2, \dots, \quad (\text{М 2.14})$$

где $P_k(x)$ суть полиномы:

$$P_k(x) = b_0 x^2 (x_0 - x)^{(2n+1)/2} + b_1 x^3 (x_0 - x)^{(2n+3)/2} + \dots + b_k x^{2+k} (x_0 - x)^{(2n+2k+1)/2}, \quad (\text{М 2.15})$$

причем коэффициенты b определяются посредством обычного процесса ортогонализации и так, чтобы система полиномов $P_k(x)$ образовала полную систему линейно независимых функций. Все полиномы P_k удовлетворяют граничным условиям (М 2.6), (М 2.9). Заменим u на u_m в уравнениях (М 2.11) и (М 2.13), тогда получим проблему экстремума функции m переменных $a_0, a_1, \dots$:

$$D_m[a_0, a_1, \dots, a_{m-1}] = \int_0^{x_0} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k \right)'^2 + q_1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k \right)^2 \right\} dx, \quad (\text{М 2.16})$$

при условии

$$H_m[a_0, a_1, \dots, a_{m-1}] = \int_0^{x_0} \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k \right)^2 dx. \quad (\text{М 2.17})$$

Так как D_m —непрерывная функция переменных a_k , а коэффициенты формы (М 2.16) конечны благодаря специальному выбору функций $P_k(x)$ в виде (М 2.15), то функция D_m согласно теореме Вейерштрасса достигает минимума в некоторой точке „поверхности эллипсоида“ (М 2.17). Напишем условие свободного минимума функции $D_m - \lambda_m^{(1)} H_m$, где $\lambda_m^{(1)}$ —параметр. Оно будет

$$\frac{\partial}{\partial a_v} \{ D_m - \lambda_m^{(1)} H_m \} = \int_0^{x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k' P_v' + (q_1 - \lambda_m^{(1)}) P_v \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k \right\} dx = 0; \\ v=0, 1, \dots, m-1, \quad (\text{М 2.18})$$

откуда определяются коэффициенты a_k , соответствующие условию минимума. Умножая эти m условий на произвольные A_v и суммируя, получим

$$\int_0^{x_0} \{ u_m' U_m' + (q_1 - \lambda_m^{(1)}) u_m U_m \} dx = 0, \quad (\text{М 2.19})$$

где

$$U_m = \sum_{v=0}^{m-1} A_v P_v(x). \quad (\text{М 2.20})$$

Если $U_m = u_m$, то условие (М 2.19) дает равенство

$$D_m^{(0)} = \int_0^{x_0} (u_m'^2 + q_1 u_m^2) dx = \lambda_m^{(1)}, \quad (\text{М 2.21})$$

т. е. характеристическое число квадратической формы D_m есть ее минимум, $D_m^{(0)}$, при условии (М 2.17). Полагая $m = 1, 2, 3, \dots$, мы получаем последовательность минимумов $D_1^{(0)}, D_2^{(0)}, D_3^{(0)}$ и т. д., причем таких, что при любом m будет справедливо условие $D_{m+1}^{(0)} \leq D_m^{(0)}$. Рассмотрим форму $D_1(a_0)$ с условием $H_1(a_0) = 1$. Условие ее минимума дает

$$\lambda_1^{(1)} = \int_0^{x_0} \{P_0'^2 + q_1 P_0^2\} dx \div \int_0^{x_0} P_0^2 dx. \quad (\text{М 2.22})$$

Эти интегралы сводятся согласно (М 2.15) к интегралам вида

$$\int_0^t t^r (1-t)^s dt,$$

т. е. — к бета-функциям, а интеграл $\int_0^{x_0} q_1 P_0^2 dx$ есть интеграл от непрерывной функции. Следовательно, $\lambda_1^{(1)}$ конечно и определено, а потому последовательность чисел $D_m^{(0)}$, ($m = 2, 3, \dots$) есть ограниченная сверху (числом $\lambda_1^{(1)}$) монотонная последовательность неубывающих чисел. Так как, далее, функция q_1 достигает минимума $q_{1 \min}$ в $(0, x_0)$ (см. рис. 2), то

$$D_m^{(0)} = \int_0^{x_0} (u_m'^2 + q_1 u_m^2) dx \geq \int_0^{x_0} q_1 u_m^2 dx \geq q_{1 \min}. \quad (\text{М 2.23})$$

Следовательно, последовательность $D_m^{(0)}$ сходится к пределу, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_m^{(0)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^{(1)} = \lambda^{(1)}, \quad (\text{М 2.24})$$

и поставленная вариационная задача имеет смысл. Далее, из сходимости чисел $D_m^{(0)}$ следует, что при любом m

$$\int_0^{x_0} (u_m'^2 + q_1 u_m^2) dx < \lambda^{(1)},$$

но так как q_1 достигает минимума в интервале (x', x'') , где она отрицательна, то это условие будет

$$\int_0^{x_0} u_m'^2 dx + \int_0^{x'} q_1 u_m^2 dx + \int_{x''}^{x_0} q_1 u_m^2 dx < \lambda^{(1)} - \int_{x'}^{x''} q_1 u_m^2 dx \leq |\lambda^{(1)}| + |q_{1 \min}| \equiv N.$$

Так как каждый из интегралов в левой части этого неравенства положителен, то

$$\int_0^{x_0} u_m'^2 dx \leq N.$$

Затем, так как $u_m(0) = 0$, то

$$|u_m(x)|^2 = \left| \int_0^{x_0} u_m'(x) dx \right|^2,$$

или, согласно неравенству Шварца

$$u_m^2(x) \leq x_0 \int_0^{x_0} u_m'^2 dx \leq N x_0$$

Таким образом, функции u_m образуют последовательность равномерно ограниченных функций.

Опять в силу неравенства Шварца имеем

$$|u_m(x_1) - u_m(x_2)|^2 = \left| \int_{x_1}^{x_2} u_m' dx \right|^2 \leq |x_1 - x_2| \int_{x_1}^{x_2} u_m'^2 dx \leq N |x_1 - x_2|,$$

где x_1, x_2 — два какие-либо значения x в интервале $(0, x_0)$. Следовательно, функции u_m образуют в то же время множество равномерно непрерывных функций. Поэтому к последовательности u_m применим принцип предельных точек в функциональном пространстве, и из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $u_m^{(1)}$, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $u^{(1)}$, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m^{(1)} = u^{(1)}. \quad (\text{М } 2.25)$$

Докажем, что функция $u^{(1)}$ есть единственное решение проблемы. Для этого обратимся к равенству (М 2.19), которое преобразуем интегрированием по частям. Интегрируя первое слагаемое, найдем

$$\int_0^x u_m' U_m' dx = - \int_0^{x_0} u_m U_m'' dx.$$

Интегрируя второе слагаемое, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{x_*} (q_1 - \lambda_m^{(1)}) u_m U_m dx &= - \int_0^{x_*} U_m' \left\{ \int_0^x (q_1 - \lambda_m^{(1)}) u_m d\xi \right\} dx + \\ &+ \left[U_m \int_0^x q_1 u_m dx \right]_{x=0}^{x=x_*} = - \int_0^{x_0} U_m' \left\{ \int_0^x (q_1 - \lambda_m^{(1)}) u_m d\xi \right\} dx, \end{aligned}$$

так как член в прямых скобках исчезает благодаря поведению полиномов $P_k(x)$ (М 2.15), на границах интервала $(0, x_0)$. Интегрируя

еще раз по частям, благодаря этому свойству полиномов получим *

$$\int_0^{x_0} (q_1 - \lambda_m^{(1)}) u_m U_m dx = \int_0^{x_0} U_m'' \left\{ \int_0^x \int_0^{\xi} (q_1 - \lambda_m^{(1)}) u_m d\eta d\xi \right\} dx.$$

Таким образом, равенство (М 2.19) принимает вид

$$\int_0^{x_0} U_m'' \left\{ u_m - \int_0^x \int_0^{\xi} (q_1 - \lambda_m^{(1)}) u_m d\eta d\xi \right\} dx = 0. \quad (\text{М 2.26})$$

Так как, далее, коэффициенты A в выражении U_m (М 2.20) могут быть выбраны по произволу, то мы можем потребовать, чтобы последовательность полиномов U_m'' сходилась равномерно к некоторой непрерывной функции U'' ; это позволяет применять теорему Вейерштрасса о равномерной аппроксимации всякой функции полиномами [78]. Кроме того, предельная функция будет удовлетворять условиям

$$U'(0) = U'(x_0) = 0, \quad (\text{М 2.27})$$

так как полиномы U_m'' удовлетворяют этому условию (при $n > 1/2$). Перейдем теперь к пределу $m \rightarrow \infty$ в равенстве (М 2.26). Интегралы

$$\int_0^{x_0} U_m'' u_m dx; \quad \int_0^{x_0} U_m'' \int_0^x \int_0^{\xi} \lambda_m^{(1)} u_m d\eta d\xi$$

сходятся в силу (М 2.24) и (М 2.25). Рассмотрим более детально сходимость интеграла

$$I_m = \int_0^{\xi} q_1 u_m d\eta.$$

С этой целью возьмем функции

$$\Psi_m = \frac{u_m}{x^2}, \quad \Psi_m^{(1)} = \frac{u_m^{(1)}}{x^2}.$$

Согласно (М 2.25) при всяком $x \neq 0$ существует предел

$$\Psi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{u_m^{(1)}}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

Далее, легко убедиться, что подпоследовательность $\Psi_m^{(1)}$ сходится равномерно к непрерывной функции $\Psi(x)$ в интервале (α, x_0) , как бы мало ни было число $\alpha (> 0)$. Рассмотрим теперь последовательности

* Это справедливо при $n > 1/2$, ибо при $x \rightarrow x_0$ функции $q_1 u_m$ и U_m' ведут себя как $(x_0 - x)^{(2n-1)/2}$. При $x \rightarrow 0$ проинтегрированная часть в обоих случаях исчезает как x^3 .

u_m и Ψ_m в интервале $(0, \alpha)$. Согласно (М 2.14) и (М 2.15) последовательность u_m при любом m может быть представлена в виде

$$u_m(x) = c_{0m}x^2 + \varepsilon_m(x), \quad \varepsilon_m(x) \equiv \sum_{k=1}^p c_{mk} x^{k+2},$$

где $p = 2m + \frac{(2n+1)}{2}$, а c_{mk} — некоторые коэффициенты, являющиеся линейными комбинациями чисел вида x_0^q и чисел a_k и b_k . Далее, очевидно, что, каково бы ни было число m , существует число N_1 такое, что

$$|c_{mk}| < N_1.$$

Поэтому будем иметь:

$$|\varepsilon_m(x)| = x^3 \left| \sum_{k=1}^p c_{mk} x^{k-1} \right| \leq N_1 x^3 \sum_{k=1}^p x^{k-1}, \quad x \geq 0;$$

$$|\varepsilon'_m(x)| = x^2 \left| \sum_{k=1}^p (k+2) c_{mk} x^{k-1} \right| \leq N_1 x^2 \sum_{k=1}^p (k+2) x^{k-1}, \quad x \geq 0.$$

При $m, p \rightarrow \infty$, суммы в правых частях превращаются в ряды по степеням x , сходящиеся при $x \leq \alpha < 1$, так что

$$|\varepsilon_m(x)| \leq N_1 x^3 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} = \frac{N_1}{1-\alpha} x^3,$$

$$|\varepsilon'_m(x)| \leq S N_1 x^2; \quad S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \alpha^{k-1}.$$

Таким образом,

$$|u_m(x)| \leq |b_{0m}x^2| + |\varepsilon_m(x)| \leq N_1 x^2 + \frac{N_1}{1-\alpha} x^3 \leq \frac{N_1}{1-\alpha} x^2 \equiv N' x^2,$$

$$|u'_m(x)| \leq 2|b_{0m}x| + |\varepsilon'_m(x)| \leq N_1(2+S\alpha)x \equiv N''x,$$

и функции $\Psi_m(x)$ в интервале $(0, \alpha)$ удовлетворяют условию

$$|\Psi_m(x)| < N', \quad 0 \leq x \leq \alpha < 1,$$

т. е. являются равномерно ограниченными. Рассмотрим интеграл

$$K_m(\alpha) = \int_0^{\alpha} \Psi_m'^2 dx = \int_0^{\alpha} \left\{ \frac{u'_m(x)}{x^2} - \frac{2}{x^3} u_m(x) \right\} dx.$$

Согласно выше написанным неравенствам для u_m и u'_m будем иметь

$$K_m(\alpha) \leq \int_0^{\alpha} \left\{ N S + 2 \frac{N}{1-\alpha} \right\}^2 dx \equiv M(\alpha),$$

поэтому последовательность Ψ_m является также последовательностью равномерно непрерывных функций и, подобно последовательности u_m , сходится к некоторой непрерывной функции $\Psi(x)$ в интервале $(0, \alpha)$. Таким образом последовательность $\Psi_m^{(1)}$ равномерно сходится во всем интервале $(0, x_0)$, а потому интеграл I_m сходится равномерно ($q_1 \eta^2$ конечно и непрерывно). Тем самым, переход к пределу $m = \infty$ в равенстве (М 2.26) законен, и мы получаем условие для функции u

$$\int_0^{x_0} U'' \left\{ u - \int_0^x \int_0^{\xi} (q_1 - \lambda^{(1)}) u \, d\eta \, d\zeta \right\} dx = 0. \quad (\text{М 2.28})$$

Так как, далее, функция U удовлетворяет (М 2.27), то, применяя к этому условию лемму Дюбуа — Реймона [79], имеем

$$u - \int_0^x \int_0^{\xi} (q_1 - \lambda^{(1)}) u \, d\eta \, d\zeta = c_1 + c_2 x,$$

где c — постоянные. Дифференцируя дважды, находим

$$u'' - q_1 u + \lambda^{(1)} u = 0, \quad (\text{М 2.29})$$

т. е. предельная функция (М 2.25) удовлетворяет исходному уравнению (М 2.10), что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что функция u есть единственное решение. Для этого допустим, что она не дает минимума функционала $D[\varphi]$, определенного для множества всех допустимых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям (М 2.12) и (М 2.13). Тогда число

$$\lambda^{(1)} = \int_0^{x_0} (u'^2 + q_1 u^2) dx \quad (\text{М 2.30})$$

будет больше нижней грани $D[\varphi]$, и среди множества функций $\varphi(x)$ найдется хотя бы одна такая функция φ_0 , для которой

$$D[\varphi_0] = \int_0^{x_0} (\varphi_0'^2 + q_1 \varphi_0^2) dx < \lambda^{(1)} - \varepsilon, \quad (\text{М 2.31})$$

где ε — некоторая положительная величина. Аппроксимируем функцию φ_0 равномерно посредством полиномов вида

$$R_k(x) = c_0 + \sum_{v=1}^k c_v P_v(x)$$

так, чтобы при любом x имело место условие

$$|\varphi_0'(x) - R_k'(x)| < \varepsilon_1,$$

где ε_1 — наперед заданное положительное число. Это всегда возможно сделать согласно теореме Вейерштрасса. Отсюда следует, что

$$\left| \varphi_0(x) - \int_0^x R_k(x) dx \right| < \varepsilon_1 x_0$$

или

$$\left| \varphi_0(x) - c_0 x - \sum_{v=1}^k c_v P_v(x) \right| < \varepsilon_1 x_0,$$

так как $P_v(0) = 0$. Но $\varphi_0(x)$ удовлетворяет условиям (М 2.12), поэтому $|c_0| < \varepsilon_1$, и, следовательно, $\varphi_0(x)$ равномерно аппроксимируется посредством полиномов вида

$$Q_k(x) = \sum_{v=1}^k c_v P_v(x),$$

так что при всяком x

$$|\varphi_0(x) - Q_k(x)| < 2\varepsilon_1 x_0.$$

Полагая k достаточно большим, мы можем путем соответствующего подбора коэффициентов c_v добиться, чтобы выполнялось условие

$$|D[Q_k(x)] - D[\varphi_0]| < \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. согласно (М 2.31) будет

$$D[Q_k(x)] < D[\varphi_0] + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda^{(1)} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но функционал $D[Q_k(x)]$ есть не что иное, как функционал $D_k[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]$ (М 2.16) (они отличаются только обозначениями коэффициентов). Поэтому мы получаем

$$D_k[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}] < \lambda^{(1)} - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda_k^{(1)} - \frac{\varepsilon}{2}$$

[см. (М 2.21)], так как числа $\lambda_k^{(1)}$ сходятся к $\lambda^{(1)}$, убывая. Иными словами, мы пришли к противоречию, что квадратичная форма D_k меньше ее минимума $\lambda_k^{(1)}$.

Итак, нами доказано существование первой характеристической функции $u^{(1)}$ и первого характеристического числа $\lambda^{(1)}$. Аналогично можно без труда доказать существование второй характеристической функции $u^{(2)}$ и второго характеристического числа $\lambda^{(2)}$, применив обычный прием отыскания функции, дающей минимум интегралу (М 2.11) при условиях (М 2.12) и (М 2.13) и дополнительном условии

$$\int_0^{x_0} u^{(1)} u^{(2)} dx = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая задача имеет дискретный спектр характеристических чисел и им соответствующих характеристических функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{x_0} u^{(k)} u^{(m)} dx = \begin{cases} 1 & \text{при } m = k, \\ 0 & \text{при } m \neq k. \end{cases} \quad (\text{М 2.32})$$

Это обстоятельство позволяет нам применять в полном объеме вариационную теорию характеристических чисел Куранта [80]. Все доказанные свойства проблемы сохраняются при переходе к вариационной проблеме (2.21), (2.22), сформулированной в § 2, так как этот переход производится посредством замены переменных

$$x = \sqrt{n} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\theta}}, \quad u = \frac{v}{\sqrt{\theta}},$$

а якобиан этого преобразования

$$\frac{\partial(x, u)}{\partial(\xi, v)} = \frac{\sqrt{n}}{\theta^{3/4}}$$

не исчезает ни при каких значениях θ .

В заключение рассмотрим поведение числа $\lambda^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$. Согласно (М 2.5) можно выбрать число α такое, чтобы в интервале, скажем, $(0, x_0/2)$ имело место неравенство

$$q_1 < \frac{2}{x^2} + \alpha^2 \equiv \bar{q}_1 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{x_0}{2}\right).$$

Характеристические числа $\bar{\lambda}$ граничной проблемы

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}'' - \bar{q}_1 \bar{u} + \bar{\lambda} \bar{u} &= 0, \\ \bar{u}(0) = \bar{u}\left(\frac{x_0}{2}\right) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

согласно вариационной теории не менее соответствующих чисел λ . С другой стороны, характеристические числа граничной проблемы

$$\left. \begin{aligned} u'' - q_1' u + \lambda u &= 0, \\ u(0) = u(x_0) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где q_1' есть минимум функции q_1 в $(0, x_0)$, не более соответствующих чисел λ . Таким образом, имеем

$$\left(\frac{k\pi}{x_0}\right)^2 + q_1 < \lambda^{(k)} < \left(\frac{2p_k}{x_0}\right)^2 + \alpha^2,$$

где p_k суть последовательные нули функции Бесселя $J_{1/2}$. Поэтому при $k \rightarrow \infty$, величина $\frac{\lambda_k}{k^2} = O(1)$, так как нули $p_k = O(k^2)$ при $k \rightarrow \infty$.

§ 3. Сила вязкости при пульсациях

Тензор напряжений, как известно, есть [81]

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V} \right) - \mu_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial k} + \frac{\partial v_k}{\partial i} \right),$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k; \end{cases} \quad i, k = x, y, z,$$

где μ_0 — коэффициент вязкости, а p — гидростатическое давление. Пусть u , как и ранее, обозначает радиальное перемещение частицы, тогда

$$v_x = \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_y = \frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_z = \frac{z}{r} \frac{\partial u}{\partial t}$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Поэтому имеем

$$\Pi_{xx} = p + \frac{2}{3} \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - 2 \frac{x^2}{r} \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

$$\Pi_{xy} = -2 \frac{xy}{r} \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

$$\Pi_{xz} = -2 \frac{xz}{r} \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Составляющая силы вдоль оси x после некоторых преобразований будет

$$-\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial z} = \left\{ -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{4}{3} r^4 \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \right\} \frac{x}{r};$$

аналогичные выражения получим для составляющих вдоль осей y и z . Это ведет к уравнению (3.6).

§ 4. Численное решение условия бифуркаций

Для числового решения условия (4.8) сделаем подстановку

$$u = \xi^2 w, \quad (\text{М } 4.1)$$

тогда для w получим уравнение

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{4}{\xi} \frac{dw}{d\xi} + n \theta^{n-1} w = 0. \quad (\text{М } 4.2)$$

Конечное решение этого уравнения согласно (4.9) должно удовлетворять условию

$$\text{при } \xi = 0, \quad w = 1, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0. \quad (\text{М } 4.3)$$

Так как [см. формулу (а) в сноске на стр. 16]

$$\theta^{n-1} = 1 - \frac{n-1}{\sigma} \xi^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \left(\frac{\xi^2}{6} \right)^2 - \dots,$$

то решение уравнения (М 4.2) при малых значениях ξ может быть принято в виде ряда по четным степеням ξ . Это разложение, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$w = 1 - \frac{n}{10} \xi^2 + \frac{(8n-5)n}{540} \xi^4 - \frac{(22n-19)n^2}{45360} \xi^6 + \dots \quad (\text{М 4.4})$$

При $n < 5$ использование первых четырех членов обеспечивает точность 0.01% от вычисляемых величин. Мы используем разложение (М 4.4) вплоть до значения $\xi = 0.250$, а затем решаем численным методом Кутты уравнение (М 4.2). В табл. 5 дан результат решения для поли-

ТАБЛИЦА 5

$n = 3/2$				$n = 3$			
ξ	w	$\frac{dw}{d\xi}$	$\frac{1}{\xi^2} F$	ξ	w	$\frac{dw}{d\xi}$	$\frac{1}{\xi^2} F$
0.00	1	0	$+\infty$	0.00	1	0	$+\infty$
.25	0.991	-0.074	11.8	.25	0.982	-0.146	11.7
.50	.964	— .144	5.64	.50	.931	— .267	5.32
.75	.920	— .205	3.48	.75	.851	— .353	3.05
1.00	.864	— .254	2.34	1.00	.756	— .393	1.88
.25	.792	— .290	1.61	.25	.657	— .398	1.08
.50	.716	— .310	1.12	.50	.560	— .374	0.746
.75	.637	— .319	0.771	.75	.472	— .336	.471
2.00	.558	— .314	.523	2.00	.393	— .292	.298
.25	.481	— .300	.340	.25	.325	— .247	.185
.50	.409	— .278	.213	.50	.268	— .205	.117
.75	.343	— .251	.123	.75	.220	— .168	.072
3.00	.284	— .221	.063	3.00	.182	— .137	.045
.25	.233	— .189	.026	.50	.126	— .090	.018
.50	.190	— .157	.006	4.00	.088	— .059	.007
3.6571	.166	— .136	.000	.50	.064	— .039	.003
				5.00	.047	— .026	.002
				.50	.036	— .018	.002
				6.00	.028	— .012	.002
				.50	.022	— .008	.002
				6.9011	.017	— .006	.001

тропных шаров $n = 3/2$ и $n = 3$. В третьем столбце приведены значения функции

$$w'(\xi) + \frac{3}{\xi} w(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left(u' + \frac{u}{\xi} \right) = \frac{1}{\xi^2} F,$$

которые показывают, что при $l=1$ условие бифуркации выполняется.

§ 5. Природа математической задачи о нерадиальных колебаниях

Исключая амплитуду A из уравнений (1.30), (1.31), получим интегродифференциальное уравнение для конденсаций

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) \right\} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dr} \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} B' \right) + \left\{ \lambda^2 + 4\pi G \rho_0 - \right.$$

$$-\frac{l(l+1)}{r^2} \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \Big\} B' = \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \left\{ l r^{l-1} \int_r^a B' \rho_0 \frac{dr}{r^{l-1}} - \frac{l+1}{r^{l+2}} \int_0^r B' \rho_0 r^{l+2} dr \right\}. \quad (\text{М } 5.1)$$

Сделаем подстановку

$$\varphi = r \sqrt{\rho_0 \gamma} \frac{\rho_0}{\rho_0} B'; \quad (\text{М } 5.2)$$

тогда, проведя вычисления, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left[k^2 S + T - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi = \alpha_l \int_r^a \beta_l \varphi dr + \alpha'_l \int_0^r \beta'_l \varphi dr, \quad (\text{М } 5.3)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0}; \quad T = 6\pi G \rho_0 \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} + \frac{1}{2} g_0 \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} \right) - \frac{1}{4} g_0^2 \left(\frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} \right)^2; \\ \alpha_l &= -\frac{4\pi G l}{2l+1} \sqrt{\rho_0 g_0} \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} r^l; \quad \beta_l = \sqrt{\rho_0} \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} \frac{1}{r^l}; \\ \alpha'_l &= \frac{4\pi G l}{2l+1} \sqrt{\rho_0 g_0} \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} \frac{1}{r^{l+1}}; \quad \beta'_l = \sqrt{\rho_0} \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} r^{l+1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{М } 5.4)$$

Введем переменные Эмдена посредством соотношений (2.1).

Тогда после несколько кропотливых вычислений получим вместо (М 5.3) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \left\{ \lambda s + t - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \right\} \varphi &= \int_{\xi}^{\xi_0} a_l(\xi) b_l(x) \varphi(x) dx + \\ &+ \int_0^{\xi} a'_l(\xi) b'_l(x) \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{М } 5.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{n k^2}{4\pi G \rho_0}; \quad s = \frac{1}{\theta}; \quad t = \frac{n}{4} \left\{ 6\theta^{n-1} + (2-n) \frac{\theta^{n-2}}{\theta^2} \right\}; \\ a_l &= -n^2 \theta^{n-2/2} (-\theta') \frac{l}{2l+1} \xi^l; \quad b_l = \frac{1}{x^l} \theta^{n-2/2}; \\ a'_l &= n^2 \theta^{n-2/2} (-\theta') \frac{l+1}{2l+1} \frac{1}{\xi^{l+1}}; \quad b'_l = x^{l+1} \theta^{n-2/2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{М } 5.6)$$

При этом функция φ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = \varphi(\xi_0) = 0. \quad (\text{М } 5.7)$$

Рассмотрим функцию (ядро Вольтерра)

$$L(\xi, x) = \begin{cases} a_l(\xi) b_l(x) & \text{при } x > \xi, \\ a'_l(\xi) b'_l(x) & \text{при } x < \xi. \end{cases} \quad (\text{М } 5.8)$$

Тогда уравнение (М 5.5) примет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \varphi = -\lambda s \varphi - t \varphi + \int_0^{\xi_0} L(\xi, x) \varphi(x) dx. \quad (\text{М } 5.9)$$

Функция Грина для оператора в левой части этого уравнения при граничных условиях (М 5.7) будет

$$G(\xi, y) = \begin{cases} \frac{1}{c_l} (y^{\mu_l} + k_l y^{\nu_l}) \xi^{\mu_l}, & \xi \leq y, \\ \frac{1}{c_l} (\xi^{\mu_l} + k_l \xi^{\nu_l}) y^{\mu_l}, & \xi \geq y, \end{cases} \quad (\text{М } 5.10)$$

где обозначено

$$\begin{cases} k_l = -\xi_0^{2(l+1)}; & c_l = 2k_l(l+1); \\ \mu_l = l + \frac{3}{2}; & \nu_l = -\left(l + \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad (\text{М } 5.11)$$

Таким образом, вместо уравнения (М 5.9) получим

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\xi} G(\xi, y) \left\{ \lambda s(y) \varphi(y) + t(y) \varphi(y) - \int_0^{\xi} L(y, x) \varphi(x) dx \right\} dy.$$

Полагая, далее

$$K(\xi, x) = G(\xi, x) t(x) - \int_0^{\xi} G(\xi, y) L(y, x) dy, \quad (\text{М } 5.12)$$

получим

$$\varphi(\xi) = \lambda \int_0^{\xi_0} G(\xi, x) s(x) \varphi(x) dx + \int_0^{\xi_0} K(\xi, x) \varphi(x) dx. \quad (\text{М } 5.13)$$

Задача сводится, следовательно, к нахождению решений этого интегрального уравнения. Положим

$$v(\xi) = \varphi(\xi) - \int_0^{\xi_0} K(\xi, x) \varphi(x) dx. \quad (\text{М } 5.14)$$

Если существует резольвента $\Gamma(\xi, x)$ неоднородного уравнения (М 5.14), то из этого уравнения следует

$$\varphi(\xi) = v(\xi) + \int_0^{\xi_0} \Gamma(\xi, x) v(x) dx. \quad (\text{М } 5.15)$$

Тогда, полагая

$$\Phi(\xi, x) = G(\xi, x) s(x) + \int_0^{\xi_0} \Gamma(\xi, \eta) G(\eta, x) d\eta, \quad (\text{М } 5.16)$$

после некоторых преобразований вместо уравнения (М 5.13) получим однородное интегральное уравнение для φ

$$\boxed{\varphi(\xi) = \lambda \int_0^{\xi_0} \Phi(\xi, x) \varphi(x) dx}. \quad (\text{М } 5.17)$$

По теореме Фредхольма [82]

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{D(\xi, \eta)}{D(1)}, \quad (\text{М } 5.18)$$

где функция $D(\xi, \eta)$ и величина $D(1)$ известны, если известно „ядро“ $K(\xi, x)$ (М 5.12). Нам не удалось (за исключением случая $n=1$) в общем виде показать, что для шаров Эмдена $D(1) \neq 0$; мы здесь встречаемся с большими трудностями формального характера.

Далее, с помощью (М 5.10) и (М 5.11) нетрудно показать, что

$$|G(\xi, x)| \leq \xi_0/l + 1/2.$$

С помощью (М 5.12) можно показать, что второй член в правой части (М 5.13) при $l \rightarrow \infty$ будет как угодно мал, так что характеристические числа λ при $l \rightarrow \infty$ будут изменяться с l так же, как характеристические числа граничной проблемы

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}'' + \left(\lambda^* s - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \right) \bar{u} &= 0, \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(\xi_0) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Но характеристические числа $\lambda^* = 0(l^2)$ при $l \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что (4.19) есть решение интегро-дифференциального уравнения (М 5.5). Легко видеть, что в случае $l=1$

$$\varphi(\xi) = -\xi \theta^{n/2} \theta'$$

согласно уравнениям (4.6) и (М 5.2). Подставим это выражение φ в уравнение (М 5.5). Тогда, замечая равенство (М 5.7) и производя ряд очевидных преобразований, после несколько кропотливого расчета найдем

$$2\theta'^2 + \frac{2}{3} \theta^n \theta' - \frac{\lambda}{n} \xi \theta \theta' = \frac{n}{3} (-\theta') \left\{ -\frac{2}{\xi^2} \int_0^\xi \theta^{n-1} \theta' \xi^3 d\xi + \xi \int_\xi^{\xi_0} \theta^{n-1} \theta' d\xi \right\}.$$

Производя интегрирование по частям во втором интеграле правой части, получим

$$2\theta'^2 + \frac{2}{3} \theta^n \theta' - \frac{\lambda}{n} \xi \theta \theta' = \frac{2}{3} \frac{\theta'}{\xi^2} \int_0^\xi (\theta^n)' \xi^3 d\xi,$$

т. е. тождество при $\lambda=0$.

§ 6. Распределение амплитуд при нерадiallyных колебаниях $l=1$

Амплитуда радиального перемещения частиц A может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 B - \frac{d}{dr} (r^2 A) \right\} = -2A, \quad (\text{М } 6.1)$$

которое получим, исключая C из уравнений (4.1), (4.2). Так как B и A связаны соотношением (4.6), где u выражается равенством (4.19), то, исключив B из (4.6) и (М 6.1), получим

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \left\{ \frac{4}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right\} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right) A = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} u \right).$$

Вводя сюда переменные Эмдена и полагая

$$A - 1 = a, \quad (\text{М 6.2})$$

получим для a однородное уравнение

$$\frac{d^2 a}{d\xi^2} + \left\{ \frac{4}{\xi} + n \frac{\theta'}{\theta} \right\} \frac{da}{d\xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(n \xi^2 \frac{\theta'}{\theta} \right) a = 0. \quad (\text{М 6.3})$$

Корни фундаментального уравнения суть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -3$, так что a должно быть конечно в центре, и без нарушения общности можно принять

$$\text{при } \xi = 0, \quad a = 1. \quad (\text{М 6.4})$$

Убедимся, что радиальное смещение нигде не имеет узлов, кроме плоскости экватора гармоник. Полагая

$$\eta = \xi^2 \theta^{n/2} a, \quad (\text{М 6.5})$$

вместо (М 6.3) получим

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + Q\eta = 0; \quad Q \equiv -\frac{2}{\xi^2} - \frac{n(n+2)}{4} \frac{\theta'^2}{\theta^2} - \frac{n}{2} \theta^{n-1} + \frac{n}{\xi} \left(-\frac{\theta'}{\theta} \right). \quad (\text{М 6.6})$$

Функция

$$\eta_1 = \xi^2 \theta^{n/2}$$

осциллирует точно в интервале $(0, \xi_0)$ и удовлетворяет уравнению вида (6.6) при

$$Q' = -\frac{2}{\xi^2} + \frac{n}{\xi} \left(-\frac{\theta'}{\theta} \right) + \frac{n}{2} \theta^{n-1} + \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\theta'^2}{\theta^2}.$$

Разность

$$Q' - Q = n \left\{ \theta^{n-1} + \frac{\theta'^2}{\theta^2} \right\}$$

повсюду не отрицательна в $(0, \xi_0)$. Поэтому η не осциллирует в $(0, \xi_0)$ и радиальная составляющая смещения u для вибрации $l=1$ не имеет узлов внутри сферы (кроме экваториальной плоскости гармоник).

§ 7. Вычисление эффекта вращения при малых колебаниях

а) „Нулевое“ приближение. Подставив разложения (4.29) в основные уравнения (4.26), (4.27), (4.28), получим для „нулевого“ приближения (однородный шар в покое) уравнения

$$\left(\nabla^2 \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} + 4\pi G \rho_0 \right) \sigma_0 + \lambda_0 \sigma^0 = 0, \quad (\text{М 7.1})$$

$$\nabla^2 \chi_0 = 0, \quad (\text{М } 7.2)$$

$$\text{при } r = \alpha, \quad c \lambda \sigma_0 = \frac{\partial \chi_0}{\partial r}; \quad c \equiv \frac{\gamma p_0}{g \alpha \rho_0}. \quad (\text{М } 7.3)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$\sigma_0 = f_0(r) S_l(\theta, \varphi); \quad \chi_0 = \Psi_0(r) S_l(\theta, \varphi), \quad (\text{М } 7.4)$$

где S_l — тессеральная гармоника порядка l , ($S_l = e^{is\varphi} P_l^s(\cos \theta)$). Тогда основанные уравнения (М 7.1), (М 7.2) будут

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi_0}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi_0 = \lambda_0 f_0, \quad (\text{М } 7.5)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df_0}{dr} \right) + \left[\mu^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_0 = 0, \quad (\text{М } 7.6)$$

$$\text{где} \quad \mu^2 = \frac{\lambda_0 + 4\pi G \rho_0}{\gamma p_0 / \rho_0}, \quad (\text{М } 7.7)$$

с граничным условием (М 7.3)

$$c \lambda_0 f_0 = \frac{d\Psi_0}{dr}. \quad (\text{М } 7.8)$$

Решения уравнений (М 7.6) и (М 7.5) при условии, что f_0 и Ψ_0 конечны в центре, будут соответственно

$$f_0 = \frac{1}{V r} I_{l+1/2}(\mu r), \quad (\text{М } 7.9)$$

$$\Psi_0 = c_0 r^l + \frac{\lambda_0}{2l+1} \left\{ r^l \int_0^r f_0 \frac{d\xi}{\xi^{l-1}} - \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^r f_0 \xi^{l+2} d\xi \right\}. \quad (\text{М } 7.10)$$

Подставив f_0 из (М 7.9) в (М 7.10) и замечая соотношения для функций Бесселя [83]

$$\left. \begin{aligned} \int_0^z z^{p+1} I_p(z) dz &= z^{p+1} I_{p+1}(z), \\ \int_0^z z^{-p+1} I_p(z) dz &= -z^{-p+1} I_{p-1}(z), \end{aligned} \right\} \quad (\text{М } 7.11)$$

получим

$$\Psi_0 = c_0 r^l - \frac{\lambda_0}{2l+1} \frac{V r}{\mu} \left\{ I_{l-1/2}(\mu r) + I_{l+1/2}(\mu r) \right\};$$

или, согласно хорошо известной формуле для функций Бесселя

$$I_{p-1}(z) + I_{p+1}(z) = \frac{2p}{z} I_p(z), \quad (\text{М } 7.12)$$

это уравнение принимает вид

$$\Psi_0 = c_0 r^l - \frac{\lambda_0}{\mu^2 V r} I_{l+1/2}(\mu r) = c_0 r^l - \frac{\lambda_0}{\mu^2} f_0(r). \quad (\text{М } 7.13)$$

Этот результат также непосредственно следует из сравнения (М 7.5) и (М 7.6). Будем оперировать с частным решением $c_0 = 0$, что справедливо, если пренебрегать возмущением гравитационного потенциала, которое привносит уклонение свободной поверхности от сферы $r = a$. Подстановка решений (М 7.9) и (М 7.13) в граничное условие (М 7.8) в силу равенства (М 7.12) дает

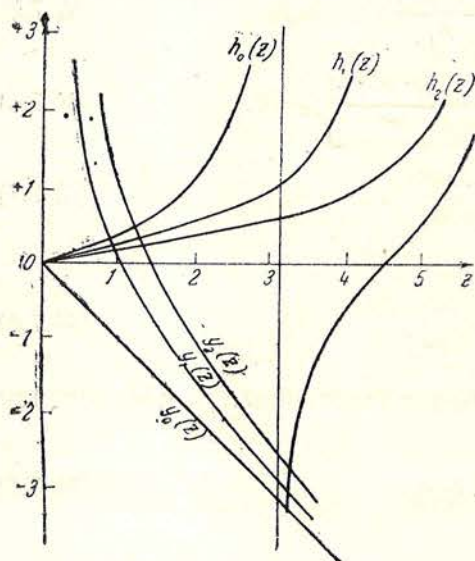


Рис. 6. Численное решение граничного условия

На рис. 6 приведены кривые $h_l(z)$ и функции $y_l(z) = \frac{l-z^2}{z}$ для $l=0,1,2$. Пересечение этих кривых дает нам табличку значений наименьшего корня z_0

l	z_0	$hl(z)$
0	0	0
1	0.92	± 0.20
2	1.30	± 0.20

Далее, из формулы (М 7.7) находим

$$\lambda_0 = \frac{1}{3} \frac{c^2}{a^2} \left\{ z^2 - \frac{4\pi G \rho_0 a^2}{\frac{1}{3} c^2} \right\}.$$

Если, как выше, принять $\frac{1}{3} \frac{c^2}{a^2} \cong \frac{GM}{a}$, то второй член в скобках приближенно равен 3 и, по крайней мере, в вибрациях $l=0,1,2$ однородная сфера неустойчива ($\lambda_0 < 0$). В случае, когда $c_0 \neq 0$ еще-

$$\frac{I_{l+3/2}(z)}{I_{l+1/2}(z)} = \frac{l + \frac{c}{a} z^2}{z}; \quad z \equiv \mu a. \quad (\text{М } 7.14)$$

Согласно теореме о вириале величина $\frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \frac{1}{3} \bar{c}^2$ (где $\bar{c}^2$ — среднее квадратов термических скоростей газовых частиц) порядка GM/a , с точностью до малых порядка ω^2 . Поэтому величина

$$c = \frac{\gamma p_0}{\rho_0 g a} \cong -a, \quad (\text{М } 7.15)$$

и уравнение (М 7.4) сводится к уравнению

$$h_l(z) \equiv \frac{I_{l+3/2}(z)}{I_{l+1/2}(z)} = \frac{l - z^2}{z}. \quad (\text{М } 7.16)$$

ние общего вида (М 7.13), величины корней мало отличаются от рассмотренного случая, как показывает небольшое вычисление.

б) Первое приближение. Уравнения первого приближения суть

$$(\nabla^2 \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} + 4\pi G \rho_0) \sigma_1 + \lambda_0 \sigma_1 + \lambda_1 \sigma_0 = 0, \quad (\text{М } 7.17)$$

$$\nabla^2 \chi_1 = \lambda_0 \sigma_1 + \lambda_1 \sigma_0, \quad (\text{М } 7.18)$$

при $r = a$, $c(\lambda_0 \sigma_1 + \lambda_1 \sigma_0) - \frac{\partial \chi_1}{\partial r} = -\frac{i q_0}{a \lambda_0} \frac{\partial \chi_0}{\partial \varphi}$; $q_0 \equiv V 2\pi G \rho_0 \lambda_0$. $(\text{М } 7.19)$

Решение, как и выше, ищем в форме (М 7.4). Тогда для амплитуд f_1 и Ψ_1 получим уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi_1}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi_1 = \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0, \quad (\text{М } 7.20)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df_1}{dr} \right) + \left[\mu^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_1 = -\frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} f_0. \quad (\text{М } 7.21)$$

Полагая

$$f_1 = \frac{u_1}{r}, \Psi_1 = \frac{v_1}{r}, f_0 = \frac{u_0}{r}, \Psi_0 = \frac{v_0}{r}, \quad (\text{М } 7.22)$$

вместо (М 7.20) и (М 7.21) найдем

$$u_1'' + \left[\mu^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_1 = -\frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} u_0, \quad (\text{М } 7.23)$$

$$v_1'' - \frac{l(l+1)}{r^2} v_1 = \lambda_0 u_1 + \lambda_1 u_0. \quad (\text{М } 7.24)$$

Найдем решение уравнения (М 7.23). Из (М 7.6) и (М 7.23) исключим величину $\mu^2 - l(l+1)/r^2$, тогда получим

$$u_1'' u_0 - u_0'' u_1 = -\frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} u_0^2.$$

С помощью очевидной формулы $(u'u)' = u''u + u'u'$, это уравнение примет вид

$$(u_1' u_0)' - (u_0' u_1)' = -\frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} u_0^2,$$

откуда находим

$$u_1 = -\frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} u_0 \int_0^r \frac{1}{u_0^2} \int_0^r u_0^2 d\xi dr \equiv -\frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} x_1(r), \quad (\text{М } 7.25)$$

и общий интеграл уравнения (М 7.23) будет

$$u_1 = u_0 - \frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} x_1(r). \quad (\text{М } 7.26)$$

Теперь решение уравнения (М 7.24) будет [см. формулу (М 7.10)]

$$v_1 = c_1 r^{l+1} + \frac{\lambda_0}{2l+1} \left\{ r^{l+1} \int_0^r \frac{u_1}{\xi^l} d\xi - \frac{1}{r^l} \int_0^r u_1 \xi^{l+1} d\xi \right\} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} (v_0 - c_0 r^{l+1}),$$

где $v_0 = \Psi_0 r$. Подставив сюда выражение u_1 (М 7.26) и обозначая

$$y_1(r) = \frac{1}{2l+1} \left\{ r^{l+1} \int_0^r \frac{x_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{r^l} \int_0^r x_1(\zeta) \zeta^{l+1} d\zeta \right\}, \quad (\text{М } 7.27)$$

получим окончательно

$$v_1 = (c_1 - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) c_0) r^{l+1} + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) v_0 - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\gamma \rho_0 / \rho_0} y_1(r). \quad (\text{М } 7.28)$$

Ограничимся опять рассмотрением тех малых колебаний, для которых $c_0 = c_1 = 0$, тогда получим решение первого приближения в виде

$$f_1 = f_0 - \frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} \frac{x_1(r)}{r}, \quad (\text{М } 7.29)$$

$$\Psi_1 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) \Psi_0 - \frac{\lambda_0 \lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} \frac{y_1(r)}{r}. \quad (\text{М } 7.30)$$

Подставив эти выражения f_1 и Ψ_1 в условие (М 7.19) в силу (М 7.3), получим

$$-c \frac{\lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} X_1(a) + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \rho_0}{\gamma \rho_0} Y_1'(a) = \frac{s q_0}{a \lambda_0} \Psi_0(a), \quad (\text{М } 7.31)$$

где s — целое число (0, 1, 2, ...), а

$$X_1 = \frac{x_1(r)}{r}; \quad Y_1 = \frac{y_1(r)}{r}. \quad (\text{М } 7.32)$$

Таким образом, из (М 7.31) находим

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{a \rho_0 \lambda_0}{s \gamma \rho_0 q_0 \Psi_0(a)} [\lambda_0 Y_1'(a) - c X_1(a)]. \quad (\text{М } 7.33)$$

Эта формула определяет характеристические частоты в первом приближении.

Найдем теперь функции X_1 и Y_1 . В силу (М 7.25), (М 7.22), (М 7.9) и (М 7.32) имеем

$$X_1 = \frac{1}{\mu^{3/2} V z} \int_0^z \frac{1}{z I_p^2(z)} \int_0^z \zeta I_p^2(\zeta) d\zeta dz; \quad p = l + 1/2, \quad z \equiv \mu r. \quad (\text{М } 7.34)$$

Но согласно хорошо известной формуле для функций Бесселя

$$\int_0^z \zeta I_p^2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} z^2 \left\{ I_p^2(z) - I_{p-1}(z) I_{p+1}(z) \right\}. \quad (\text{М } 7.35)$$

Это выражение примет вид

$$X_1 = \frac{1}{\mu^{3/2} V \sqrt{z}} \left\{ \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2} \int_0^z \frac{I_{p-1}(z) I_{p+1}(z)}{I_p^2(z)} z dz \right\}. \quad (\text{М } 7.36)$$

Далее согласно (М 7.12) будем иметь

$$\frac{I_{p-1}(z) I_{p+1}(z)}{I_p^2(z)} = \frac{2p}{z} \frac{I_{p+1}(z)}{I_p(z)} - \frac{I_{p+1}^2(z)}{I_p^2(z)}. \quad (\text{М } 7.37)$$

Введем функцию

$$Q_p(z) = \frac{I_{p+1}(z)}{z I_p(z)}. \quad (\text{М } 7.38)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ_p}{dz} = \frac{1}{z} - \frac{2(p+1)}{z} Q_p + z Q_p^2; \quad (\text{М } 7.39)$$

но так как $\frac{I_{p+1}}{I_p} = z Q_p$, то согласно (М 7.37) и (М 7.39) будем иметь

$$\frac{I_{p-1} I_{p+1}}{I_p^2} = 2p Q_p - z^2 Q_p^2 = 1 - 2Q_p - z \frac{dQ_p}{dz}. \quad (\text{М } 7.40)$$

Следовательно, интегрируя (М 7.37) по частям, получим

$$\int_0^z \frac{I_{p-1} I_{p+1}}{I_p^2} z dz = \frac{z^2}{2} - z^2 Q_p = \frac{z^2}{2} - z \frac{I_{p+1}}{I_p}, \quad (\text{М } 7.41)$$

так что выражение (М 7.36) будет просто

$$X_1 = \frac{1}{2\mu^{3/2}} \sqrt{z} I_{p+1}(z) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{r} I_{l+3/2}(\mu r). \quad (\text{М } 7.42)$$

Используем теперь (М 7.27) и (М 7.32). В силу (М. 7.42) получим

$$Y_1 = \frac{1}{2l+1} \frac{1}{2\mu^{3/2}} \left\{ z^l \int_0^z I_{l+3/2} \frac{dz}{z^{l-3/2}} - \frac{1}{z^{l+1}} \int_0^z I_{l+3/2} z^{l+3/2} dz \right\}. \quad (\text{М } 7.43)$$

Входящие сюда интегралы вычисляются без труда с помощью (М 7.11). В результате получим

$$2\mu^{7/2} (2l+1) Y_1 = -z^{3/2} I_{l+1/2}(z) - 2z^{1/2} I_{l-1/2}(z) - z^{3/2} I_{l+3/2}(z).$$

Используя формулу (М 7.12) для $I_{l+3/2}$ и $I_{l-1/2}$, после простых преобразований найдем

$$\mu^{7/2} Y_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{z} I_{l+3/2}(z) - \frac{1}{\sqrt{z}} I_{l+1/2}(z) \quad (\text{М. } 7.44)$$

или, согласно (М 7.9) и (М 7.43), окончательно получим

$$\mu^2 Y_1 = -\frac{1}{\mu^2} f_0(r) - X_1(r). \quad (\text{М 7.45})$$

Нетрудно, далее, вывести формулу

$$\mu^3 \sqrt{r} Y_1' = \frac{l+1}{2} I_{l+1/2}(z) - \left(\frac{l}{z} + \frac{z}{2} \right) I_{l+1/2}(z). \quad (\text{М 7.46})$$

Таким образом, подставляя выражения X_1 и Y_1' в уравнение (М 7.34), найдем

$$-\frac{1}{\lambda_1} = \frac{a\rho_0}{sq_0 \gamma p_0} \left\{ \frac{\lambda_0}{\mu} \left[\frac{l+1}{2} h_l(z) - \left(\frac{l}{z} + \frac{z}{2} \right) \right] - \frac{c}{2} z h_l(z) \right\}, \quad (\text{М 7.47})$$

где h_l определяется посредством (М 7.16). Далее, вблизи точки бифуркации $\lambda_0 \rightarrow 0$ и мы имеем

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{a\rho_0 c}{sq_0 \gamma p_0} \frac{z}{2} h_l(z) \quad (\lambda_0 \rightarrow 0),$$

т. е. формулу (4.30) при $c = -1$. Так как всегда $c < 0$, то вблизи точки бифуркации в самой медленной вибрации всегда будет

$$\lambda_1 < 0,$$

что является основным результатом нашего исследования.

§ 8. О фундаментальных частотах стандартной звезды

Вычисления этих частот производились по формулам (3.4), (3.5), где [ср. (М 2.3) и (М 2.4)]:

$$q_1 = \frac{1}{n} \left\{ \frac{29}{\xi^2} + \frac{4n^2-1}{16} \frac{\theta'^2}{0} - \frac{4n-3}{2} \left(-\frac{\theta'}{\xi} \right) - \frac{2n+1}{4} \theta^n \right\} + 4 \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left(-\frac{\theta'}{\xi} \right),$$

а

$$\lambda_1 = \frac{1}{n} \lambda' = \frac{n+1}{n\gamma} \frac{k^2}{4\pi G\rho_c} = \frac{\gamma_0}{\gamma} \frac{k^2}{4\pi G\rho_c}.$$

Таким образом, для вычисления λ_1 потребовалось в дополнение к вычислению коэффициентов α_{kj} для случая политропы $n=3$ вычислить только интегралы вида

$$4 \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \int_0^{x_2} P_k P_j \left(-\frac{\theta'}{\xi} \right) dx$$

для различных чисел γ ($\gamma_0 = 4/3$). Это делается без труда с помощью таблиц Эмдена, позволяющих вычислить функцию $-\theta'/\xi$ для случая $n=3$. Табл. 6 содержит результат вычисления чисел λ_1 для различных γ , $\alpha = \frac{4}{3\gamma} (3\gamma - 4)$ (числа λ_1 и $\frac{\lambda_1}{\alpha}$ — сглаженные по способу наименьших квадратов).

ТАБЛИЦА 6

γ	α	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_1^{(2)}$	λ_1	a_2/a_1	λ_1/α
4/3	0.000	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-2}$	0.		
1.35	.0494	2.97	1.41	$2.20 \cdot 10^{-1}$	$2.89 \cdot 10^{-3}$	$4.42 \cdot 10^{-2}$
1.36	.0785	3.03	1.54	3.50	.88	.47
1.37	.107	3.10	1.67	4.80	.86	.52
1.38	.135	3.16	1.82	6.30	.83	.63
1.39	.163	3.22	1.96	7.70	.80	.72
1.40	.191	3.28	2.10	9.10	.78	.79
1.41	.218	3.34	2.24	$1.04 \cdot 10^{-2}$	.76	.82
1.42	.244	3.42	2.31	1.15	.73	.80
1.44	.296	3.53	2.55	1.37	.70	.67
1.45	.321	3.59	2.69	1.48	.67	.60
1.47	.372	3.71	2.88	1.69	.63	.54
1.51	.468	3.94	3.28	2.09	.54	.46
1.55	.580	4.20	3.74	2.55	.43	.38
5/3	.806	4.72	4.51	3.32	.14	.15

§ 9. О распределении амплитуд в пульсирующей стандартной звезде

Ограничиваясь ради простоты вычислением второго приближения, будем иметь [см. (3.3)]

$$u_2 = a_1 x_0^{(2n+5)/2} t^2 (1-t)^{(2n+1)/2} \left\{ 1 + \frac{a_2}{a_1} x_0^2 t(1-t) \right\}; t \equiv \frac{x}{x_0},$$

где

$$\frac{a_2}{a_1} = - \frac{a_{11} - \lambda' \gamma_{11}}{a_{12} - \lambda' \gamma_{12}}$$

изменяется от звезды к звезде при изменении γ (табл. 6). Это отношение мы вычисляем с помощью результатов вычисления указанного в предыдущем § 8. Формула (М 2.1) дает затем ненормированную амплитуду A . Вычисляя одновременно эту же функцию A для шара $n=3$, скажем $A_3(\xi)$, мы находим некоторое отклонение от строгого решения $A \sim \xi$, что характеризует, конечно, лишь погрешность второго приближения. Поэтому характер фактического распределения амплитуд будет приближенно определяться функцией

$$a(\xi) = \frac{A(\xi)}{A_3(\xi)} \xi.$$

Табл. 7 содержит результаты вычислений.

ТАБЛИ

$\gamma =$	4/3		1.35		1.36		1.37		1.38		1.39		1.40		1.41	
ξ	A_z	η	A	η	A	η	A	η	A	η	A	η	A	η	A	η
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	2.24	1	2.24	1	2.24	1	2.24	1	2.25	1	2.25	1	2.25	1	2.25	1
2	6.36	1	6.37	1	6.38	1	6.40	1.01	6.45	1.01	6.49	1.02	6.50	1.02	6.54	1.03
3	14.6	1	14.7	1	14.8	1.01	14.9	1.02	15.0	1.03	15.2	1.04	15.3	1.05	15.5	1.06
4	24.6	1	24.9	1.01	25.2	1.02	25.6	1.04	26.3	1.07	27.1	1.10	27.5	1.12	28.0	1.14
5	26.9	1	27.7	1.03	28.4	1.06	30.2	1.12	32.1	1.19	34.7	1.29	36.2	1.34	37.8	1.40
6	57.1	1	59.8	1.05	61.4	1.08	65.4	1.14	71.3	1.25	77.6	1.36	81.5	1.43	85.4	1.50

Литература

1. S. Rosseland, Univ. Oslo Publ., No. 1, 1931.
2. T. Cowling, M. N., **94**, 768, 1934; **96**, 42, 1935.
3. G. Steensholt, Zs. f. Ap. **7**, 375, 1933; P. Ledoux, Ap. J., **94**, 537, 1941.
4. A. Eddington, Innere Aufbau d. Sterne, Kap. 8, 1928; цитир. ниже как I. A. S.
5. A. Ritter, Abhandlungen, **5**, 1879.
6. J. Jean, stromy and Cosmogony, Ch. IV, 105—111, 1928.
7. H. Vogt, Veröff. d. Univ.-Sternw. zu Jena, Nr. 2, 1929.
8. См. Jeans, Problems of Cosmog., § 188, 189; Eddington, I. A. S.
9. R. Tolman, Ap. J., **90**, 568, 1939.
10. А. Б. Северный, ДАН СССР, **30**, № 5, 1941.
11. Jeans, Phil. Trans (A), **199**, 1, 1902.
12. А. Северный, ДАН СССР, **31**, № 2, 1941.
13. А. Северный, ДАН СССР, **62**, № 7, 1944.
14. А. Северный, ДАН СССР, **31**, № 2, 1941; там же **62**, № 7, 1944.
15. А. Северный, ДАН СССР, **20**, № 6, 1938.
16. R. Emden, Gaskugeln, 1907.
17. H. Lamb, Hydrodynamics, § 328, 1930.
18. Rosseland, Astroph. auf d. Atomtheor., Kap. 3, 1931.
19. См., например, S. Chandrasekhar, An Introd. to the Study of Stell. Struct., Ch. II, § 7, 45, 1939.
20. А. М. Ляпунов, Об устойчивости эллипсоидальных форм и т. д. Изд. АН 1884.
21. Cp. Rosseland, Univ. Oslo Publ., No. 1, § 2, 1931.
22. А. Северный, О теории гравитац. неустойчивости, Труды ГАИШ, **13**, вып. 2, 1940.
23. Jeans, Astronomy a. Cosmog., § 313—318, 1928.
24. Cp. W. Kelvin a. P. Tait, Treatise on Natur. Phil., II, 536—543.
25. Rosseland, ibid., § 4.
26. Eddington, I. A. S., § 131.
27. E. Milne, M. N., **91**, 4, 1930.
28. R. Fowler, ibid., **91**, 63, 1930.
29. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Вариационное исчисление, ОНТИ, **1**, ч. 2, 1935.
30. См., например, E. Ince, Ordin. Diff. Equat., Ch. VI, § 2, 1938.
31. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, ГОНТИ, стр. 246, 1938.
32. H. Zeipel, Stokh. Ak. Handl. **51**, Nr. 5, 1913; W. Plummer, M. N. **65**, 810, 1905.

1.42		1 ⁴ / ₉		1.45		1.47		1.51		1 ⁵ / ₉		1.63	
A	η		η	A	η	A	η	A	η	A	η	A	η
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2.26	1.01	2.26	1.01	2.27	1.02	2.28	1.02	2.29	1.02	2.32	1.04	2.36	1.05
6.56	1.03	6.60	1.04	6.64	1.04	6.69	1.05	6.79	1.07	6.92	1.09	7.28	1.15
15.7	1.07	15.9	1.09	16.0	1.10	16.3	1.12	16.9	1.16	17.6	1.20	19.4	1.33
28.8	1.17	29.4	1.20	30.2	1.23	31.1	1.27	33.3	1.35	35.9	1.46	43.0	1.75
40.0	1.49	42.2	1.57	44.8	1.66	47.8	1.77	54.8	2.03	63.4	2.35	85.7	3.18
91.7	1.60	97.6	1.71	104	1.82	112	1.96	129	2.27	152	2.66	219	3.83

33. Jeans, *Astron. a. Cosm.*, § 229—234, 377, 1928.
34. Jeans, *Problems of Cosm.*, Ch. VIII, § 188—189, 1919.
35. L. Thomas, *M. N.*, **91**, 122, 1930.
36. Rosseland, *ibid.*, § 5.
37. Persico, *M. N.*, **86**, 93, 1926.
38. L. Prandtl, *V. D. I.*, **77**, No. 5, 1933; T. v. Karmán, *Proc. Int. Congr. for Appl. Mech.*, 1934.
39. Eddington, *I. A. S.*, § 62.
40. Rosseland, *Univ. Oslo Publ.*, No. 2, 1932.
41. C. Pekeris, *Ap. J.*, **88**, 189, 1939.
42. Cowling, *M. N.* **101**, 8, 1942.
43. Jeans, *Phil. Trans. (A)*, **213**, 457, 1913.
44. *Cm. [22]*, § 7.
45. E. Love, *Some Problems of Geodynamics*; p. XX—XXIII; Ch. VII; Ch. VIII, 1926.
46. Milne, *M. N.*, **83**, 118, 1922.
47. Chandrasekhar, *M. N.*, **93**, 390; 449; 462; 539, 1933.
48. Cp. Lamb, *Hydrodynamics*, § 207, § 316, 1930.
49. Eddington, *I. A. S.*, Kap. V.
50. Cowling, *M. N.*, **96**, 42, 1938.
51. L. Biermann, *Zs. f. Ap.* **3**, 116, 1931.
52. Chandrasekhar, *Intr. Stell. Struct.*, Ch. XII; H. Bethe, *Phys. Rev.*, **55**, 1939.
53. Jeans, *M. N.*, **85**, 199, 1925; Woltjer, *B. A. N.*, **2**, 171, 1924.
54. Milne, *M. N.* **80**, 17, 1929; **96**, 195, 207, 1936.
55. I. Miller, *M. N.*, **90**, 59, 1929.
56. C. Payne S. Gaposhkin, *Harvard Repr.*, Ser. II, 2, 1943.
57. Rosseland, *M. N.* **103**, No. 5, 1943.
58. P. Ledoux. C. Pekeris, *Ap. J.*, **94**, 124, 1941.
59. Cp. Ledoux, *Astroph. Norveg.*, **3**, No. 8, 1940.
60. Jeans, *Astron. a. Cosm.*, § 244.
61. Rosseland, *cm. [2]*, § 6.
62. *Cm. [3]*, *M. N.*, **94**, 768.
63. Kluyver, *B. A. N.* **7**, 265, 1937.
64. Eddington, *I. A. S.* § 135—136.
65. H. Vogt, *A. N.*, **230**, 241, 1927.
66. R. Fowler and E. Guggenheim, *M. N.*, **85**, 939, 1925.
67. Biermann, *A. N.*, **257**, 269, 1935; *ibid.* **264**, 361, 1937.
68. Cowling a. Biermann, *Zs. f. Ap.*, **19**, 1, 1939.
69. Eddington, *I. A. S.*, § 98—99.

- 70. Ср. I. A. S., § 103—104.
 - 71. Bethe, Phys. Rev., 55, 1939.
 - 72. А. Северный, Астр. журн., 23, 137, 1946.
 - 73. В. Strömberg, Zs. f. Ap., 4, 118, 1932; *ibid.*, 7, 222, 1933.
 - 74. R. Courant and D. Hilbert, Method. d. math. Phys., Kap. V, § 3, 1931.
 - 75. H. Weyl, Math. Ann., 68, 1909.
 - 76. Hilb, Math. Ann., 82.
 - 77. См. [29], Дополнение III.
 - 78. См. [74], Kap. II, § 4.
 - 79. См. [29], Гл. VII, § 47.
 - 80. См. [74], Kap. VI, §§ 1—2.
 - 81. См. [18], или Lamb, Hydrodynamics, Ch. 7.
 - 82. См. [74], Kap. III, § 7.
 - 83. См., например, E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, XIII.
-

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА О ВЫБРАСЫВАНИИ МАТЕРИИ НОВЫМИ ЗВЕЗДАМИ ПОСЛЕ МАКСИМУМА БЛЕСКА

Э. Р. Мустель

Настоящая работа посвящена, в основном, физической интерпретации тех явлений, которые приводят к замене предмаксимального спектра новых звезд главным спектром, см. [1], [42]. (Предварительные соображения по данному вопросу см. [44], [45], [46].)

В первом параграфе рассмотрен вопрос о тех силах, которые действуют внутри протяженного обращаемого слоя Новых перед максимумом блеска. Особое внимание при этом уделено давлению радиации, которое к моменту максимума блеска становится весьма важным фактором, см. [5], [6].

Во втором параграфе рассмотрен вопрос об отделении главной оболочки. Рассмотрена следующая модель: непосредственно перед максимумом блеска фотосфера Новой замедляет свое движение, достигает своих наибольших размеров (сам момент максимума) и затем начинает сокращаться см. [8], [9]. Следовательно, вблизи максимума во внутренних частях обращаемого слоя образуется большой градиент скоростей. Это же приводит к тому, что указанные части становятся прозрачными даже в центральных частотах линий поглощения. Таким образом, на внутренние слои отделившейся оболочки в момент максимума блеска начинает действовать усиленное селективное давление радиации.

Кроме того, в конце данного параграфа обсуждены различные механизмы (см. рис. 1—4) расширения — сжатия Новой.

В третьем параграфе обсужден вопрос о тех процессах, которые должны иметь место в отделившейся оболочке в результате усилившегося селективного давления радиации на ее внутренние слои (см. выше). В данном случае будет образован внутренний β слой, который начнет продвигаться внутрь отделившейся оболочки, именуемой α слоем (см. рис. 5). Превращение слоя α в β слой и объясняет полностью замену предмаксимального спектра (α слой) главным (β слой). В конце данного параграфа обсужден вопрос об ускорениях и скоростях α и β слоев, а также вопрос о наличии в спектрах новых звезд до максимума нескольких абсорбционных систем.

В четвертом параграфе произведено сравнение теории с наблюдениями, которое является вполне удовлетворительным. Кроме того показано, что и все остальные специфические спектроскопические явления, происходящие сразу же после максимума, опять-таки могут быть объяснены с помощью введения давления радиации. Особо рассмотрены явления, происходившие в спектре N Her 1934, см. рис. 10, причем в данном случае вычислена толщина отделившейся оболочки ($60 r_{\odot}$ для металлов и $100 r_{\odot}$ для водорода).

В пятом параграфе рассмотрен вопрос о происхождении диффузно-искрового (и орionoва) спектра. Представлены аргументы в пользу того, что здесь мы имеем дело с непрерывным истечением материи из новых звезд, начинающимся сразу же после максимума (см. также [40] и [41]).

В шестом параграфе рассмотрен вопрос о происхождении вторичных (дополнительных) систем в спектрах новых звезд. Показано, что и здесь их возникновение может быть связано с усилением селективного давления радиации вблизи максимума.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе предполагается рассмотреть один из наиболее важных вопросов физики новых звезд, а именно вопрос о выбрасывании ими материи после максимума блеска. Соответствующие спектроскопические явления, которые связываются с этим выбрасыванием, наиболее полно описаны в обзорной статье Мак-Лафлина [1] (Mc Laughlin). В этой же статье Мак-Лафлина содержится спектроскопическая терминология, введенная им ранее в других работах [2, 3]. Терминологией Мак-Лафлина мы и будем в дальнейшем пользоваться.

Спектроскопические явления, совершающиеся вблизи момента максимальной яркости, можно охарактеризовать весьма кратко так.

Непосредственно перед максимумом спектр новых звезд содержит обычно одну абсорбционную систему, обнаруживающую доплеровское смещение в сторону коротких длин волн. Величина этого смещения, выраженная в км/сек, различна для различных Новых и колеблется от 70 км/сек (N Psc 1925) до 1400 км/сек (N Aql 1918). У некоторых Новых смещение изменялось со временем по мере приближения звезды к максимуму. Указанный спектр, согласно Мак-Лафлину, мы будем именовать „предмаксимальным спектром“ (pre-maximum spectrum). Эмиссия, связанная со смещенными линиями поглощения, образующими предмаксимальный спектр, и расположенная в сторону больших длин волн от каждой линии, или слаба, или в некоторых случаях даже отсутствует.

Почти сразу же после максимума яркости спектр новых звезд испытывает существенные изменения. А именно, спустя весьма небольшой промежуток времени после максимума в спектре новых звезд появляется новая, более смещенная абсорбционная система, которая согласно терминологии Мак-Лафлина называется „главным спектром“ (principal spectrum). Сейчас же после появления главного спектра предмаксимальный спектр начинает слабеть, в то время как главный спектр усиливаться. Обычно предмаксимальный спектр исчезает сразу же после того, как главный спектр становится достаточно развитым. Таким образом, после максимума в течение некоторого времени Δt в спектрах новых звезд присутствуют одновременно две абсорбционные системы: предмаксимальный спектр и главный спектр. Это время Δt колеблется для различных Новых от нескольких часов до нескольких дней.

Одновременно с появлением главного абсорбционного спектра появляются расширенные эмиссионные линии — так называемые полосы. Спустя еще некоторое время, в среднем, когда Новая ослабевает на $1^m.5$ по сравнению с яркостью в момент максимума, появляется новая система абсорбционных линий. Вследствие того, что этот спектр намного более размыт, чем главный спектр, и вследствие того, что в нем выделяются линии ионизованных атомов, Мак-Лафлин предложил называть этот спектр диффузно-искровым (diffuse-enhanced spectrum). Смещение этой системы, грубо говоря, в два раза больше, чем смещение линий главного спектра, но в различных Новых отношение скоростей колеблется от 1.5 до 2.5. В течение некоторого времени после максимума обе рассмотренные системы „главный спектр“ и „диффузно-искровой спектр“ являются наиболее характерными системами в спектрах новых звезд. Однако наряду с этими системами часто в спектрах новых звезд появляются дополнительные системы, которые не могут быть отнесены ни к главному спектру, ни к диффузно-искровому спектру. Эти системы мы будем именовать вторичными системами. Их смещение может быть или больше, или меньше, чем смещение линий в предмаксимальном спектре. Вторичные системы могут появляться как сразу же непосредственно после максимума, так и спустя некоторое время. Обычно они относительно недолговечны.

Описанные здесь спектроскопические факты относятся к некоторой типичной, идеализированной Новой. В то же время ни одну новую звезду нельзя рассматривать как полностью типичную, каждая из них имеет свои особенности, ей присущие. Поэтому в дальнейшем при интерпретации наблюдений мы будем в каждом случае особо отмечать существующие отклонения от описанных выше типичных законов. Еще раз отметим, что наиболее полное изложение рассмотренных типичных законов, а также ряд указаний на отклонение от этих законов, содержится в выше цитированной статье Мак-Лафлина [1]. Сейчас же мы остановимся кратко на вопросе о возможной интерпретации вышеизложенных спектроскопических явлений.

В настоящее время принято считать, что все эти явления связаны с мощным выбрасыванием материи новой звездой в моменты, непосредственно следующие за моментом максимума ее блеска. В частности, каждая абсорбционная система, наблюдающаяся в спектре Новой после максимума, сопоставляется при этом или с основной оболочкой, отделившейся от Новой (в большинстве случаев относительно сферической), или с некоторым выброшенным звездой поглощающим газовым облаком, расположенным на линии, соединяющей наблюдателя и какую-либо часть фотосферического диска звезды (или весь диск). Скорость движения данного образования отождествляется приближенно с той скоростью, которую обнаруживает связанная с ним абсорбционная система. В частности, основная оболочка, которая впоследствии регистрируется как туманность, окружающая Новую, сопостав-

ляется с главным спектром. Однако одна из абсорбционных систем должна быть связана с поглощающей материей, непрерывно выбрасываемой после максимума с поверхности Новой. В § 5 мы увидим, что существование диффузно-искрового спектра может быть выяснено только с такой точки зрения.

Рассмотрим теперь основной вопрос — вопрос о тех силах, которые могут приводить к извержению материи из новых звезд. В данном отношении имеется ряд работ, из которых следует, что, повидимому, одним из наиболее вероятных факторов, определяющих такое извержение, является давление радиации. Наиболее важными работами здесь являются исследования Милна [4] (E. Milne) и особенно Мак-Кри [5, 6] (W. McCrea). Подсчеты, содержащиеся в работах Мак-Кри, убедительно показывают, что давление радиации во внешних слоях расширяющейся новой звезды становится к моменту максимума исключительно важным фактором. А именно, в этот момент ускорение сообщаемое радиацией внешним слоям, может стать даже большим, чем гравитационное ускорение, сообщаемое им звездой. Происходит это, конечно, по той причине, что в момент максимума каждая новая звезда обладает исключительно большими размерами, а, следовательно, в верхних частях ее протяженной оболочки ускорение силы тяжести относительно невелико. В то же время светимость звезды в этот момент весьма велика.

Однако, исследования Милна и Мак-Кри совсем не объясняют всей специфики явлений, наблюдающихся в спектрах Новых в моменты, следующие за моментом яркости. В частности, главные недостатки теории Милна таковы: а) с точки зрения теории Милна совершенно неясно, почему выброс материи должен начинаться именно сейчас же после максимума и в такой иногда исключительно интенсивной форме; в то же время наблюдения указывают, что эта последовательность явлений может с полным правом рассматриваться, как закон, имеющий лишь весьма редкие исключения; б) с точки зрения теории Милна внезапное образование после максимума нескольких абсорбционных систем и в том числе диффузно-искрового спектра представляется совершенно непонятным. К исследованиям Мак-Кри применимы те же самые возражения, которые только что были изложены. Кроме того, применяя во второй своей работе [6] теорию Милна, Мак-Кри считает, что во внешних слоях новой звезды должен существовать градиент скоростей. Однако возникновение такого градиента скоростей Мак-Кри не объясняет. Ссылка же его на работу Пайка [7] (S. Pike) не может рассматриваться как обоснованная, ибо в работе Пайка рассматривается скорость движения уровня, характеризуемого постоянной оптической толщью; эта же скорость для модели Пайка не может быть отождествляема со скоростью материи, образующей оболочку звезды.

Однако, основное положение Мак-Кри, подтвержденное вычислениями о том, что выбрасывание материи новой звездой в момент

максимума яркости обусловлено именно давлением радиации, это положение вряд ли может вызвать какие-либо сомнения. Наличие других сил, помимо давления радиации, в данном случае, весьма мало вероятно. Указанное положение Мак-Кри и будет нами положено за основу в дальнейшем. А именно, мы покажем, что с помощью селективного давления радиации вполне возможно объяснить почти все те специфические явления, которые наблюдаются в спектрах Новых после максимума яркости и которые были нами перечислены. Повидимому, лишь в отношении диффузно-искрового спектра существует исключение. А именно, можно думать, что в данном случае мы имеем дело с выбрасыванием материи, имеющим частично взрывной характер. Этот вопрос будет нами обсужден в § 5.

Далее, мы покажем, что действительно все процессы выбрасывания материи должны начаться в интенсивной форме только лишь после максимума блеска. До максимума мы наблюдаем совершенно другой процесс, а именно процесс расширения всей звезды, как некоторого целого и непрерывного образования. Это уже совсем другой вопрос, и сейчас об этом мы говорить не будем. Некоторые сведения в данном отношении содержатся в конце § 2 настоящей работы, а также в предыдущих работах автора [8, 9].

В заключение отметим, что настоящая работа может рассматриваться как естественное продолжение только что указанных работ автора. Поэтому предполагается, что читатель знаком с основным содержанием этих работ.

§ 1. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ОБРАЩАЮЩЕМ СЛОЕ НОВОЙ ЗВЕЗДЫ ВБЛИЗИ МАКСИМУМА БЛЕСКА

Как мы увидим далее, явления выбрасывания материи в момент максимума яркости можно вполне удовлетворительно объяснить, если только допустить, что отделение основной оболочки (и вторичных оболочек) происходит внутри того весьма протяженного обращаемого слоя, который перед максимумом окружает фотосферу Новой (см. [8]). На основании сказанного следует, что, в первую очередь, мы должны заняться рассмотрением тех сил, под действием которых перед максимумом происходит движение материи в обращаемом слое звезды. Предполагая, что это движение носит радиальный характер и пренебрегая вязкостью материи, мы можем написать обычное уравнение движения

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_r}{\partial t} = Q_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p + p')}{\partial r}, \quad (1.1)$$

где v_r — скорость движения материи на расстоянии r от центра звезды, Q_r — полная сила, действующая на единицу массы, p — газовое давление и p' — полное давление радиации. Рассмотрим сначала левую часть уравнения (1.1). Сделать какие бы то ни было выводы чисто

теоретического характера о входящих туда слагаемых весьма трудно. Для этого пришлось бы разрешить всю задачу о движении материи внутри обращающего слоя. Однако в настоящее время это не представляется возможным из-за того, что наши знания о механике и физике процесса расширения новой звезды пока еще весьма скудны. Поэтому мы должны обратиться к наблюдениям, которые могут быть использованы следующим образом. В выше цитированной работе автора [8] было показано, что перед моментом максимума (но не очень близко к максимуму!) внутри протяженного обращающего слоя у каждой типичной Новой величина $\frac{\partial v_r}{\partial r}$ относительно невелика, т. е. в каждой точке обращающего слоя материя движется примерно с одной и той же скоростью $v_r = v_0 = \text{const}$ (в смысле независимости от r , но не от t). При этом, если данный обращающий слой достаточно протяженный, то эта скорость в силу свойств геометрического эффекта должна весьма мало отличаться от той скорости V , которая соответствует смещенным линиям поглощения, присутствующим в спектре Новой перед максимумом. Таким образом, если действительно для данной звезды $v_r = \text{const}$ и если ее обращающий слой действительно протяжен, то лучевая скорость, находящаяся из смещения линий поглощения и исправленная за скорость самой Новой, дает нам хорошее представление как о величине $v_r = v_0 = \text{const}$, так, следовательно, и о величине $\frac{\partial v_r}{\partial t}$. Чем менее точно соблюдается условие $\frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$, т. е. чем шире абсорбционные линии в спектре Новой перед максимумом, тем менее точными сведениями о производной $\frac{\partial v_r}{\partial t}$ мы располагаем. В самом общем случае наблюдения (т. е. изменение величины V) дают нам представление лишь о некотором среднем ускорении движущейся материи, входящей в обращающий слой. В какой степени это среднее ускорение $\frac{dv_r}{dt}$ совпадает с находимым из наблюдений ускорением $\frac{dV}{dt}$, сказать трудно. Тем более трудно сделать какие бы то ни было заключения о величине обоих слагаемых, стоящих в левой части (1.1). Однако, имея в виду вышеуказанные результаты автора, мы для грубой оценки ускорений можем приближенно считать, что у всех новых звезд перед максимумом выполняются следующие условия: а) внутри обращающего слоя $v_r \approx \text{const}$; б) обращающий слой достаточно протяжен, так что $V \approx v_r$. Следовательно, в предположении справедливости этих обоих условий будем иметь

$$\frac{dV}{dt} \approx \frac{\partial v_r}{\partial t} \approx \frac{dv_r}{dt}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим теперь соответствующие наблюдательные данные. Обычно (кроме N Pic 1925 и N Her 1934) спектры новых звезд удавалось по-

лучать впервые лишь за сутки, за двое суток до максимума яркости. Рассмотрение соответствующих наблюдательных данных показывает, что ускорения $\frac{dV}{dt}$ (и, следовательно, приближенно $\frac{dv_r}{dt}$), характеризующие данную фазу развития звезды, относительно не велики. Ряд соответствующих данных мы сейчас воспроизведем.

В спектре N Gem 1912 до максимума согласно Мак-Лафлину [10] наблюдались две абсорбционные системы, но точные данные об ускорениях здесь пока отсутствуют. Согласно Уайзу [11] (A. V. Wyse) N Aql 1918 в течение суток, предшествовавших максимуму, обнаружила небольшое уменьшение лучевой скорости (по абсолютной величине). Это уменьшение оказалось равным для металлов ≈ 60 км/сек, для водорода 180 км/сек. Само же среднее смещение соответствующих линий в течение рассматриваемого периода составляло примерно 1300—1400 км/сек. N Cyg 1920 является звездой, в спектре которой до максимума оказалось три абсорбционные системы [12]. При этом за 24 часа одна из систем увеличила свое смещение с 535 до 553 км/сек, другая же, напротив, уменьшила его с 406 до 375 км/сек (данные для водорода).

Смещение единственной абсорбционной системы, наблюдавшейся у N Psc 1925 в течение не менее 10 дней, предшествовавших максимуму яркости, оставалось практически постоянным и равным приблизительно 70 км/сек.

Смещение линий поглощения в спектре N Her 1934 в течение 2—3 дней, предшествовавших максимуму, оставалось практически постоянным и равным 170—180 км/сек. Это смещение заметно уменьшалось только в течение нескольких дней после открытия звезды и было отличным для водорода и металлов [13]. N Lac 1936 в течение суток, предшествовавших максимуму, обнаружила весьма небольшое положительное ускорение. За сутки смещение линий увеличилось всего на 70 км/сек при величине самого смещения, равного примерно 1100—1200 км/сек [14].

Таким образом, мы видим, что ускорения, наблюдаемые при расширении Новых перед максимумом блеска, действительно не велики и на несколько порядков меньше, чем $g_{\odot}$ ($2.36 \cdot 10^4$ км/сек в день), или же вообще отсутствуют. Это важное обстоятельство мы должны все время помнить. В заключение вопроса об ускорениях мы должны рассмотреть еще один вопрос, тесно связанный с вопросом о протяженности обращающего слоя. Дело заключается в следующем. Рассмотрим расширяющуюся звезду, обладающую вначале относительно непротяженным обращающим слоем, и пусть скорость этого расширения (постоянная на всех уровнях) есть v_0 . Тогда совершенно очевидно, что наблюдаемая „эффективная“ скорость расширения звезды V , которая выводится из смещения линий поглощения, будет меньше, чем v_0 . Допустим, однако, что звезда продолжает расширяться с той же скоростью

$v_0 \approx \text{const}$, но что относительная протяженность ее обращающего слоя непрерывно растет. В этом случае величина V будет также непрерывно возрастать, стремясь асимптотически к величине v_0 . Все это будет воспринято наблюдателем как возникновение положительного ускорения. Оценить возможное значение только что рассмотренного эффекта сейчас весьма трудно. Вполне возможно, что с этим эффектом мы имели дело в случае вздутия N Lac 1936. Действительно, мы только что указывали, что перед максимумом блеска смещение линий поглощения в спектре этой звезды увеличилось на 70 км/сек. Одновременно с этим линии поглощения заметно сузились. В то же время сужение линий поглощения говорит нам, хотя и неоднозначно, об увеличении протяженности обращающего слоя. Однако, как показал автор [9], в большинстве случаев рассмотренный эффект не должен играть никакой существенной роли. Напротив, главную роль в наблюдаемом сужении линий поглощения перед максимумом должно, повидимому, играть уменьшение градиента скоростей внутри обращающего слоя. Это в особенности относится к N Her 1934, обращающий слой которой уже задолго до максимума превосходил фотосферу звезды в несколько раз [15].

Обратимся теперь к рассмотрению величины Q_r . Во-первых, мы должны принять во внимание гравитационные силы, обусловленные самой звездой. Мы имеем

$$Q_r^g = -\frac{GM}{r^2}, \quad (1.3)$$

G — гравитационная постоянная и M — масса Новой.

Совершенно естественно, что сейчас же возникает вопрос о возможном существовании других сил, входящих в Q_r , но уже не гравитационного происхождения. Единственно мыслимыми такими силами могут быть, повидимому, лишь силы электрического и магнитного происхождения. Иные возможности в данном отношении вряд ли имеются. В частности, сил трения, возникающих при прохождении одного газового компонента через другой (так называемое diffusion drag), мы пока не учитываем. В самом деле, наблюдения показывают, что перед максимумом все элементы обычно дают приблизительно одно и то же доплеровское смещение линий поглощения. Таким образом, в данном случае атомы различных элементов движутся примерно с одной и той же скоростью. В этом случае мы можем все величины, входящие в (1.1), относить к полной плотности материи в данной точке. Величина ρ в (1.1) и будет тогда этой полной плотностью, обусловленной наличием всех элементов в 1 см³ на уровне r . Таким образом, вычисляя например давление радиации, мы должны вводить полное давление радиации, т. е. давление радиации, испытываемое всеми элементами, содержащимися в данном месте. То же самое относится и к остальным членам уравнения (1.1). В тех слу-

чаях, когда различные элементы движутся с различной скоростью (N Нег 1934 сразу же после ее открытия), положение усложняется, и мы эти случаи рассматривать не будем, ибо нас сейчас интересует только принципиальная сторона дела. Правда, можно было бы допустить, что еще до вспышки новые звезды окружает некоторая разреженная материальная среда, которая после вспышки вызывает торможение расширяющегося обращающего слоя. Однако по чисто физическим соображениям существование такой среды в высшей степени невероятно и поэтому мы эту возможность также рассматривать не будем.

Вопрос о роли сил электрического и магнитного происхождения обсуждался различными авторами в связи с возможной интерпретацией отрицательных ускорений, наблюдавшихся в спектрах новых звезд [16], [17]. Из этой дискуссии с несомненностью следует, что ожидать здесь каких-либо заметных эффектов нет никаких оснований.

Таким образом, можно думать, что из массовых сил, действующих в обращающем слое до максимума, главную роль играют гравитационные силы, являющиеся единственными силами, направленными к центру звезды.

Рассмотрим, наконец, последний член правой части уравнения (1.1). Он состоит из двух слагаемых: первого $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ и второго $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r}$. О первом слагаемом в количественном отношении мы можем сказать пока очень мало. Некоторые соображения в данном отношении, в основном, качественного характера, содержатся в конце § 2. Однако следует отметить, что в качественном отношении теоретическая интерпретация интересующих нас спектроскопических явлений мало зависит от знания величины $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$. Поэтому мы сейчас перейдем ко второму слагаемому. Мы имеем хорошо известное выражение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} = \frac{\pi \int_0^{\infty} F_{\nu} (k_{\nu} + \sigma_{\nu}) d\nu}{c}. \quad (1.4)$$

Здесь F_{ν} — результирующий поток радиации на данном уровне r , отнесенный к единичному интервалу частот при частоте ν ; k_{ν} — коэффициент непрерывного поглощения, рассчитанный на единицу полной массы, σ_{ν} — коэффициент поглощения и рассеяния в сфере линий поглощения, т. е. коэффициент, характеризующий селективное поглощение радиации. Рассеяние вне абсорбционных линий (например, томсоновское рассеяние) нас сейчас из-за его малой роли интересоваться не будет.

Рассмотрим сначала внесение непрерывного поглощения, которое определяется интегралом

$$A_c = \int_0^{\infty} F_{\nu} k_{\nu} d\nu,$$

Величина A_c в какой-либо точке обращающего слоя Новой зависит в исключительно сильной степени от коэффициента поглощения k_ν . Однако, так как плотность материи внутри обращающего слоя Новой нам фактически неизвестна и так как условия ионизации и возбуждения атомов там также достаточно хорошо не известны, мы о величине k_ν можем сказать пока очень мало. Поэтому мы вынуждены идти другим путем. А именно в дальнейшем нас будет интересовать та сила, обусловленная давлением радиации, которая действует на всю материю, расположенную выше некоторого уровня $r=r_0$, который мы в дальнейшем будем отождествлять с уровнем отделения оболочки. В дальнейшем мы будем называть его критическим уровнем.

Указанная сила $P_{r_0}^c$, рассчитанная на единицу площади, может быть записана следующим образом:

$$P_{r_0}^c = \frac{\pi \int_0^\infty d\nu \int_{r_0}^{R_0} F_\nu k_\nu \rho dr}{c}, \quad (1.5)$$

где значок c при $P_{r_0}^c$ поставлен ввиду того, что пока мы обсуждаем общее, а не селективное давление радиации. R_0 есть внешний радиус обращающего слоя.

Как мы уже указывали, спектроскопические явления, наблюдающиеся после максимума яркости, могут быть вполне удовлетворительно объяснены, если только предположить, что внутренняя граница оболочки (оболочек), отделяющейся от Новой, расположена внутри обращающего слоя звезды. Более того, мы увидим далее, что в случае N Her 1934 отделились от звезды лишь самые внешние части ее протяженного обращающего слоя, так что в этом случае, для границы отделения оболочки с несомненностью соблюдалось неравенство

$$\tau_\nu^c \ll 1. \quad (1.6)$$

Величина τ_ν^c здесь и в дальнейшем есть оптическая толща, измеренная коэффициентом общего поглощения. В связи с этим нами и поставлен значок c . Если одновременно с условием (1.6) линейная толщина Δr того слоя, который отделится от Новой после максимума, мала по сравнению с величинами r_0 и R_0 (что опять-таки имело место в случае N Her 1934), то внутри слоя $\Delta r = R_0 - r_0$ величина F_ν будет практически постоянной. Второе условие, касающееся величины Δr , можно переписать в виде следующего неравенства:

$$\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0 - r_0}{r_0}\right)^2 \ll 1. \quad (1.7)$$

Предполагая справедливость обоих неравенств (1.6) и (1.7), мы (1.5) перепишем так:

$$P_{r_0}^c \approx \frac{\pi}{c} \int_0^\infty F_\nu \tau_\nu^c d\nu. \quad (1.8)$$

В (1.8)

$$\tau_{\nu}^c = \int_{r_0}^{R_0} k_{\nu} \varepsilon dr. \quad (1.9)$$

Далее, опять-таки в связи с (1.6), величину πF_{ν} мы можем приближенно заменить величиной πG_{ν} , где πG_{ν} есть поток фотосферической непрерывной радиации внутри слоя Δr . Если πG_{ν}^p есть поток ν -радиации, излучаемой фотосферой (на уровне $r=r_p$), мы будем иметь

$$\pi G_{\nu} = \pi G_{\nu}^p \left(\frac{r_p}{r_0} \right)^2, \quad (1.10)$$

где r_p — радиус фотосферы, который в случае новых звезд перед максимумом является достаточно резко фиксированным [9].

Далее, вынесем из-под интеграла по теореме о среднем, среднюю величину τ_{ν}^c . Тогда получим

$$P_{r_0}^c \approx \frac{\pi}{c} \left(\frac{r_p}{r_0} \right)^2 \frac{1}{\tau_{\nu}^c} \int_0^{\infty} G_{\nu}^p d\nu. \quad (1.11)$$

По определению

$$\int_0^{\infty} G_{\nu}^p d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T_e^4, \quad (1.12)$$

а также

$$L = 4\pi r_p^2 \sigma T_e^4, \quad (1.13)$$

где T_e — эффективная температура Новой и L — ее болометрическая светимость. Следовательно, мы будем иметь

$$P_{r_0}^c \approx \frac{\pi}{c} \left(\frac{r_p}{r_0} \right)^2 \frac{\sigma}{\pi} T_e^4 \frac{1}{\tau_{\nu}^c} = \frac{L}{4\pi c} \frac{1}{r_0^2 \tau_{\nu}^c}. \quad (1.14)$$

Однако, получая формулу (1.14), мы не учли особенности L -континуума, т. е. той области, которая расположена за пределом серии Лаймана. Возможную роль L -континуума следует обсудить особо.

В самом деле, наблюдения показывают, что оптическая толща отделяющихся оболочек в центральных частях абсорбционных линий серии Бальмера во всяком случае на много больше, чем единица (см. § 2). Но это означает, если использовать распределение Больцмана для интересующих нас температур (перед максимумом спектры типов A , F), что непосредственно за пределом серии Лаймана ($\nu = \nu_1$) величина $\tau_{\nu \geq \nu_1}^c$ также на много больше, чем единица. Поэтому для $\nu \geq \nu_1$ во внутренних частях отделяющихся оболочек может иметь место не неравенство (1.6), а противоположное неравенство

$$\tau_{\nu \geq \nu_1}^c \gg 1. \quad (1.15)$$

Следовательно, замена πF_ν на πG_ν здесь не может быть произведена. Иначе говоря, интеграл в (1.5) должен быть разбит на два слагаемых

$$\int_{r_0}^{R_0} \rho dr \left\{ \int_0^{\nu_1} F_\nu k_\nu d\nu + \int_{\nu_1}^{\infty} F_\nu k_\nu d\nu \right\}, \quad (1.16)$$

и должна быть произведена оценка роли каждого из этих слагаемых. В частности, пусть осуществляются следующие предположения: а) пусть поглощение радиации определяется только водородом; б) пусть в обоих слагаемых фигурной скобки (1.16) $F_\nu = B_\nu(T_0)$, где B_ν — функция Планка с температурой T_0 ; в) наконец, пусть температура, входящая в k_ν обоих слагаемых, есть та же температура T_0 . Тогда мы будем иметь

$$\frac{\int_{\nu_1}^{\infty} B_\nu(T_0) k_\nu(T_0) d\nu}{\int_0^{\nu_1} B_\nu(T_0) k_\nu(T_0) d\nu} \approx \frac{1}{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots} \approx 5.0.$$

Таким образом, в данном случае внесение лаймановского континуума в величину P_r^c оказывается более существенным, чем внесение остальной спектральной области. Однако в применении к рассматриваемой нами оболочке, отделяющейся от Новой, это, конечно, не так. Во внутренних частях этой оболочки имеет место неравенство (1.15), а поэтому, если для частот $0 \leq \nu \leq \nu_1$ имеет место равенство $F_\nu = B_\nu(T_0)$, то для частот $\nu \geq \nu_1$ величина F_ν значительно меньше, чем $B_\nu(T_0)$. Это происходит благодаря тому, что в данном случае (для $\nu \geq \nu_1$) обратный поток радиации сравним по величине с прямым потоком радиации.

Для лаймановского континуума поток F_ν может стать сравнимым с $B_\nu(T_0)$ лишь для наиболее внешних областей оболочки, расположенных около $r = R_0$. Однако в этих областях плотность материи относительно мала, и, следовательно, влияние их на величину P_r^c будет также малым. Таким образом, в (1.16) второе слагаемое фигурной скобки может стать даже меньшим, чем первое. Совершенно очевидно, что этот вывод будет лишь усилен, если поглощение радиации определяется не только водородом.

Наконец, необходимо сделать еще следующее очень важное замечание. В выше изложенных соображениях считалось, что интенсивность непрерывной радиации, излучаемой звездой, за пределом серии Лаймана является нормальной, т. е. никакого ультрафиолетового избытка в спектрах Новых перед максимумом не существует. В том, что это так, нас убеждает следующее обстоятельство. Действительно, так как перед максимумом новые звезды обладают весьма протяженным обращаемым слоем, то присутствие ультрафиолетового избытка обязательно вызвало бы явления интенсивной флуоресценции. Однако наблюдения указывают, что эмиссия в спектрах новых звезд перед максимумом весьма слаба, или даже совсем отсутствует (соответствен-

ные данные имеются в работе автора [8], § 2). Кроме того, часто спектр новых звезд (перед максимумом) мало отличается по своей возбужденности и ионизации от обычных звездных спектров соответствующих подклассов. Из всего сказанного следует, что влияние лаймановского континуума на точность полученной формулы (1.14) не должно быть большим. В заключение следует напомнить, что, строго говоря, формула (1.14) справедлива лишь при выполнении обоих неравенств (1.6) и (1.7). Однако совершенно очевидно, что, поскольку отделение оболочек происходит внутри обращаемого слоя, постольку отклонения от неравенства (1.6) не могут быть существенными.

Наконец, если не соблюдается неравенство (1.7), то в формулу (1.14) мы можем вводить некоторое среднее значение для множителя $(r_p/r_0)^2$. Ошибка в величине P'_0 будет от этого также небольшой.

Теперь мы перейдем к рассмотрению вопроса о селективном давлении радиации. Внесение селективного давления радиации определяется интегралом

$$A_s = \int_0^\infty F_\nu \sigma_\nu d\nu. \quad (1.17)$$

При этом мы должны иметь в виду, что интеграл в (1.17) учитывает все линии поглощения, существующие в спектре звезды. Наибольшая трудность, которая возникает при вычислении этого интеграла, состоит в том, что мы фактически ничего не знаем с количественной точки зрения о потоке F_ν . Поток F_ν в данной точке обращаемого слоя может быть получен лишь в результате решения всей исключительно сложной проблемы поглощения и рассеяния радиации. В частности, трудность усугубляется тем обстоятельством, чисто математического характера, что мы имеем дело с протяженным обращаемым слоем, так что следует принимать во внимание кривизну составляющих его слоев и, тем самым, исходить из самого общего уравнения переноса:

$$\frac{\cos \vartheta}{\rho} \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{\rho r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta} = -(k_\nu + \sigma_\nu) I_\nu + (1 - \varepsilon_\nu) \sigma_\nu J_\nu + \varepsilon_\nu \sigma_\nu B_\nu + k_\nu B_\nu, \quad (1.18)$$

где

$$J_\nu = \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (1.19)$$

а величина ε_ν есть хорошо известный коллизионный множитель. Однако помимо указанной трудности существуют также другие, главные из которых таковы:

а) Мы ничего не знаем о законе изменения B_ν с r .

б) Для нас совершенно не известен закон распределения плотности ρ в обращаемом слое, а, следовательно, мы ничего не можем сказать о состоянии ионизации в каждой точке слоя и, следовательно, о величинах σ_ν , k_ν и ε_ν .

в) Вполне возможно, что внутри обращающего слоя Новой перед максимумом существуют дополнительные коллизионные процессы, которые будут увеличивать ϵ_v .

г) Не исключена возможность того, что благодаря протяженности обращающего слоя в нем играют известную роль процессы флуоресценции. Они могут не давать заметной эмиссии и тем не менее влиять на величину потока F_v , особенно в центральных частях линий поглощения.

д) Далее, в рассматриваемом случае мы не имеем статической картины. Напротив, все величины, входящие в (1.18), меняются со временем. В частности, решение уравнения (1.18) следует проводить совместно с решением уравнения (1.1) и с решением других уравнений (например, уравнения непрерывности, уравнения энергии). Кроме того, должен быть известен конкретный механизм расширения обращающего слоя. Все это, конечно, вводит исключительные дополнительные трудности.

е) Последняя и притом весьма существенная трудность состоит в следующем. Коэффициент поглощения внутри линии, σ_v , который входит в (1.18), определяется такими факторами, как термический доплер-эффект, естественное затухание, эффект Штарка и т. д. Однако совершенно ясно, что в оболочках, окружающих новые звезды, помимо термического (микроскопического) доплер-эффекта, должен существовать также и макроскопический доплер-эффект. В самом деле, нет никакого сомнения в том, что в силу взрывного характера самого процесса вспышки Новой, отдельные части расширяющейся до максимума (и в момент максимума) оболочки движутся с различной скоростью. Иначе говоря, внутри рассматриваемого нами обращающего слоя должна существовать некоторая дисперсия скоростей движения материи. Правда, относительная узость линий поглощения в соответствующую эпоху (см. [8]) говорит нам о том, что большой эта дисперсия быть не может. Однако мы не должны забывать, что указанная узость есть узость чисто относительная и что при тех ширинах, которыми обладают абсорбционные линии перед максимумом, дисперсия в возможных макроскопических скоростях может на много превышать обычную доплерову ширину $\Delta\nu_D$. С другой стороны, учесть эту макроскопическую дисперсию в настоящее время представляется совершенно невозможным. Поэтому величина σ_v , а следовательно, и величина F_v , от нее зависящая, являются, в сущности говоря, величинами весьма неопределенными.

Некоторые трудности из выше перечисленных являются весьма серьезными, и на них должно быть в дальнейшем обращено особое внимание. Пока же мы вынуждены и здесь ограничиться самыми предварительными соображениями. Как и в предыдущем случае, нас будет интересовать селективное давление радиации на всю материю, расположенную в обращающем слое, выше критического уровня $r=r_0$.

Предположим вначале, что между уровнем $r=r_0$ и фотосферой не существует вообще никакой поглощающей и рассеивающей материи. Далее предположим, что и в данном случае имеют место неравенства (1.6) и (1.7). Тогда силу $H_{r_0}^s$, которая действует на всю материю, расположенную выше уровня $r=r_0$, мы можем вычислить по формуле Мак-Кри [5]. В наших обозначениях эта сила будет равна

$$H_{r_0}^s = \frac{1}{3} a \eta T_e^4 \left(\frac{r_p}{r_0} \right)^2. \quad (1.20)$$

$H_{r_0}^s$, так же как и $P_{r_0}^c$, рассчитана на единицу площади. В этой формуле a — постоянная плотности излучения. Величина η есть относительная доля той фотосферической энергии, которая отбрасывается назад нашей оболочкой, $\Delta r = R_0 - r_0$, во всех создаваемых ею абсорбционных линиях. Множитель $(r_p/r_0)^2$ введен нами для того, чтобы учесть удаление оболочки от фотосферы.

Формула (1.20) выведена Мак-Кри применительно к сильным абсорбционным линиям. Однако автор настоящей статьи показал, что она не содержит заметной ошибки и при введении слабых линий [18].

Принимая во внимание (1.13), формулу (1.20) мы можем переписать так:

$$H_{r_0}^s = \frac{L}{3\pi c} \frac{\eta}{r_0^2}. \quad (1.21)$$

Теперь мы должны освободиться от сделанного нами ограничения. Мы предположили, что между фотосферой и той оболочкой, которая отделится от звезды, поглощающая и рассеивающая материя полностью отсутствует. Однако это, конечно, не так. Присутствие такой материи может очень сильно понизить величину $H_{r_0}^s$, находимую согласно (1.21). В соответствии с этим мы введем некоторый множитель ω , который будет учитывать такое ослабление. Тогда сила, обусловленная селективным давлением радиации и действующая на всю материю, расположенную выше уровня $r=r_0$, будет равна

$$P_{r_0}^s = H_{r_0}^s \cdot \omega = \frac{L}{3\pi c} \frac{\omega \eta}{r_0^2}. \quad (1.22)$$

Получить точное значение для ω в настоящее время совершенно невозможно. Для этого нам пришлось бы разрешить всю проблему рассеяния — поглощения радиации в обрабатываемом слое Новой. В то же время, как мы видели, это связано с исключительными трудностями. Поэтому мы вынуждены ограничиться здесь самыми краткими замечаниями. В частности, совершенно очевидно, что величина ω должна быть меньше, чем единица. Лишь в некоторых случаях она может быть равной единице (такие случаи, как мы увидим в § 4, определенно существуют); в то же время не исключена возможность и таких случаев, когда $\omega \ll 1$.

Если бы мы имели дело со статическим обращающим слоем и если бы последний был бы непротяженным, то для определения ω мы могли бы применить обычную теорию Шустера. Тогда, как легко показать, ослабляющее действие материи, расположенной между уровнями r_p и r_0 , характеризовалось бы для интервала частот $d\nu$ внутри линий поглощения следующим отношением:

$$\omega_\nu = \frac{1 + \frac{3}{4}(\tau_\nu^\sigma)_1}{1 + \frac{3}{4}(\tau_\nu^\sigma)_2}. \quad (1.23)$$

В формуле (1.23) $(\tau_\nu^\sigma)_1$ есть оптическая толщина той материи, которая расположена между уровнями r_0 и R_0 . $(\tau_\nu^\sigma)_2$ есть оптическая толщина всей атмосферы, ограниченной уровнями r_p и R_0 . Величины τ_ν^σ определены, конечно, коэффициентом рассеяния. При выводе формулы (1.23) основное значение играет постоянство результирующего потока πF_ν на всех уровнях.

Однако, так как мы имеем дело с нестатической и протяженной оболочкой, внутри которой F_ν есть функция r и t , использование (1.23) может привести к весьма серьезным ошибкам.

Теперь мы оценим относительную роль селективного и общего давления радиации. При этом мы опять ограничимся давлением радиации, действующим на всю материю, расположенную выше уровня $r=r_0$. Поэтому мы можем использовать формулы (1.14) и (1.22). Относительная роль селективного и общего давления радиации будет тогда вполне характеризоваться следующим отношением:

$$\zeta = \frac{P_{r_0}^\sigma}{P_{r_0}^c} = \frac{4}{3} \frac{\eta \omega}{\tau_\nu^c}. \quad (1.24)$$

Заметим здесь же, что если между фотосферой и уровнем $r=r_0$ поглощающая и рассеивающая материя отсутствует, и следовательно, $\omega=1$, то искомое отношение будет равно

$$\zeta' = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\tau_\nu^c}. \quad (1.25)$$

Для того чтобы применить формулу (1.24), мы должны знать три величины η , ω , τ_ν^c . Остановимся на величине η . Забегая вперед, укажем, что в нашем случае величина η может быть определена из наблюдений. Для этого мы должны определять полное поглощение во всех абсорбционных линиях предмаксимального спектра сразу же после максимума, точнее, перед появлением „главного спектра“. В этот момент предмаксимальный спектр звезды создается в основном только что отделившейся оболочкой (см. § 2 и 3). Определяя таким образом величину η приходится, конечно, допускать, что и для недоступной для

нас части спектра (с $\lambda < 2900 \text{ \AA}$) поглощение в линиях в среднем таково же, как и в доступной части спектра. Однако это допущение, по существу неизбежное, не может сильно повлиять на принимаемое значение для η . К сожалению, величину η в спектрах новых звезд и, в частности, в момент, предшествующий появлению главного спектра, никто не определял. Однако общий характер спектра и интенсивность целого ряда абсорбционных линий у типичной Новой показывают, что во всяком случае величина η в рассматриваемый момент не больше, чем величина η в спектрах обычных сверхгигантов сходного с Новой класса. Повидимому, без большой ошибки мы можем принять для подсчетов, что $\eta \leq 0.05$. В отношении величин ω и τ_v^c мы не располагаем пока никакими достаточно определенными количественными данными. Однако некоторые подсчеты здесь все же можно произвести. Эти подсчеты показывают, что перед максимумом блеска общее давление радиации может оказаться гораздо более важным фактором, чем селективное давление радиации. В самом деле, примем в качестве предельных значений: $\eta = 0.05$ и $\tau_v^c = 0.05$. Тогда получим $\zeta = \frac{4}{3} \omega$. Так как в большинстве случаев величина ω должна быть заметно меньшей, чем единица, величина ζ также оказывается меньшей, чем единица. В то же время в ряде случаев (NLас 1936) величина η была меньше, чем 0.05. Далее, τ_v^c может оказаться гораздо большей, чем 0.05. Наконец ω может даже удовлетворять неравенству $\omega \ll 1$. Все это приведет к еще меньшим значениям ζ . Однако, конечно, не следует полностью исключать и противоположные случаи. В некоторых, повидимому, нетипичных случаях может оказаться $\zeta > 1$.

В настоящем параграфе мы ограничились самым предварительным рассмотрением членов, входящих в уравнение (1.1). Более определенные заключения здесь можно сделать лишь при изучении процесса отделения оболочки.

§ 2. ОТДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОЙ ОБОЛОЧКИ В МОМЕНТ МАКСИМУМА БЛЕСКА

Разъясним содержание настоящего параграфа. Мы видели во Введении, что обычно единственная* абсорбционная система, существующая в спектрах новых звезд перед максимумом (предмаксимальный спектр), заменяется сразу же после максимума более смещенной, новой абсорбционной системой, носящей название главной системы. Главная система является после максимума наиболее устойчивой абсорбционной системой и наблюдается в спектрах Новых обычно весьма продолжительное время (по сравнению с другими системами, наблюдающимися после максимума). В соответствии с существующими в настоящее время взглядами главная система, как мы уже говорили, связывается с основной массой материи, отделившейся от Новой

* Об исключениях из этого правила см. конец § 3.

в момент максимума. Эта материя, образующая обычно относительно сферическую оболочку, и наблюдается впоследствии визуально и фотографически как туманность, окружающая звезду. Рассматриваемую оболочку мы и будем в дальнейшем называть „главной оболочкой“. Мы увидим далее, что процесс преобразования предмаксимальной системы в главную систему связан теснейшим образом с процессом отделения главной оболочки и с процессами, в ней происходящими. В настоящем параграфе будет рассмотрен первый вопрос, а именно вопрос об отделении главной оболочки. Процессы, совершающиеся в уже отделившейся главной оболочке и приводящие к появлению главной системы, а также к исчезновению предмаксимальной системы, будут рассмотрены в § 3. Наконец, вопросы, связанные с образованием диффузно-искрового спектра и вторичных систем, будут рассмотрены в § 5 и 6.

Здесь и в дальнейшем, везде, мы будем предполагать, что отделение главной оболочки происходит внутри протяженного обращаемого слоя, окружающего перед максимумом Новую. Следовательно, мы будем считать, что оптическая толща τ_y^c отделяющейся оболочки удовлетворяет неравенству (1.6) или, во всяком случае, меньше, чем 0.5. Только такое предположение дает нам возможность естественным образом объяснить интенсивные процессы выбрасывания материи, наблюдающиеся после максимума.

Далее, мы будем считать, что перед максимумом блеска обращаемый слой, окружающий каждую Новую, является относительно непрерывным (мы говорим относительно непрерывным, так как следует учитывать различного рода неоднородности в распределении материи его составляющей, а следовательно, локальные пустоты). Соответствующая аргументация в данном отношении изложена автором в его предыдущей работе [8], § 2.

Исходным для всего дальнейшего являются следующие два положения:

а) В момент максимума яркости фотосфера у каждой Новой перестает расширяться и затем начинает сжиматься. Это с достаточной убедительностью было показано Пайком [7]. Расширением фотосферы и последующим ее сжатием, собственно говоря, и обусловлено само наличие максимума яркости у звезды. Другие возможности здесь весьма мало вероятны (см. например, [8], § 1). Вопросом о том, почему в момент максимума величина r_p достигает максимума, мы сейчас заниматься не будем. Некоторые соображения по данному вопросу будут изложены нами в конце настоящего параграфа.

б) Наблюдения показывают, что смещение линий поглощения в предмаксимальном спектре после максимума изменяется, вообще говоря, мало. Главные изменения, испытываемые этим спектром после максимума, состоят лишь в том, что линии поглощения, его образующие, начинают слабеть и вскоре исчезают.

С другой стороны, само существование рассматриваемого спектра перед максимумом обусловлено существованием протяженного обращающего слоя, окружающего новую звезду. Из сказанного следует, что внешние части указанного слоя продолжают после максимума удаляться от звезды и притом некоторое время примерно с той же скоростью, с которой они двигались непосредственно перед максимумом и в момент максимума. Опять-таки теоретической интерпретацией данного факта мы здесь заниматься не будем. Однако следует отметить, что время, протекающее между моментом максимума и моментом исчезновения предмаксимального спектра, обычно весьма не велико. Поэтому, если во внешних частях обращающего слоя данной Новой существуют даже умеренные ускорения,* изменение скорости за указанный промежуток времени большим быть не должно.

На основании обоих рассмотренных положений а) и б), вытекающих практически из наблюдений, мы можем сделать следующий вывод. Этот вывод сводится к тому, что в момент максимума, а тем более в моменты, за ним следующие, в оболочке, окружающей новую звезду, имеется весьма большой градиент скоростей. Так, например, в момент максимума те части обращающего слоя, которые примыкают непосредственно к фотосфере, обладают по отношению к звезде, весьма малой скоростью. Напротив, внешние части обращающего слоя удаляются от звезды примерно с той же скоростью, с которой они двигались перед максимумом. Совершенно очевидно, что после максимума градиент скоростей увеличится еще больше, так как теперь фотосфера, а следовательно, и примыкающие к ней внутренние части обращающего слоя начинают двигаться в направлении к центру звезды. Далее, поскольку мы имеем дело с газовой средой, скорость движения отдельных элементов, составляющих обращающий слой, должна в каждый момент времени изменяться с расстоянием r непрерывно и вполне плавно.

Вывод, только что нами сделанный, мы должны теперь сопоставить с другим фактом. А именно, напомним, что перед максимумом яркости (но не в непосредственной близости от него) градиент скоростей внутри обращающего слоя у новых звезд относительно невелик [8, 9]. Более того, вычисления, проведенные автором [9], показали, что в рассматриваемый период фотосфера и обращающий слой у новых звезд движутся примерно с одной и той же скоростью.**

Из сказанного следует, что мы имеем дело с весьма быстрым образованием большого градиента скоростей. Возникновение этого градиента следует отнести к моментам, также предшествующим максимуму, но расположенным от него весьма близко. Ради удобства мы

* См. дискуссию об ускорениях для данного периода на стр. 97

** См. также [43]. В этой работе соответствующие подсчеты проведены более полно.

введем теперь следующие обозначения. Пусть $t = t_g$ есть некоторый средний момент, характеризующий тот период времени, в течение которого градиент скоростей внутри обращающего слоя Новой относительно мал. Далее, пусть момент $t = t_v$ соответствует началу образования градиента скоростей внутри обращающего слоя (вначале во внутренних его частях, прилежащих к фотосфере). Пусть $t = t_m$ есть момент максимальной яркости. Интервал $t_m - t_v$, как только что указывалось, весьма мал (в некоторых случаях этот интервал занимает буквально несколько часов). Наконец пусть момент $t = t_{pm}$ характеризует момент исчезновения предмаксимального спектра.

Прежде чем переходить к дальнейшим выводам, рассмотрим еще одно очень важное обстоятельство. Выше мы указали, что скорость, с которой до и после максимума движутся внешние части обращающего слоя, примерно одна и та же. Это должно иметь место не только для самых поверхностных граничных частей обращающего слоя, но и для области, весьма большой в линейном отношении. Линейная толщина этой области может достигать даже величины в $100 r_\odot$. В самом деле, вблизи момента $t = \bar{t}_g$ материя, составляющая обращающий слой Новой, движется на всех уровнях и, в частности, во внешних частях слоя примерно с одной и той же скоростью, скажем v_0 .

В то же время мы знаем, что в момент максимума яркости обращающий слой у новых звезд весьма протяженен и достигает в некоторых случаях величины $500 r_\odot$. Таким образом даже при очень больших массах новых звезд (вплоть до $1000 M_\odot$) среднее ускорение силы тяжести $\bar{g}$ в сравнительно протяженной внешней области обращающего слоя будет, по крайней мере, умеренным. Но тогда совершенно очевидно, что за весьма короткий промежуток времени $t_m - t_v$ и даже $t_{pm} - t_v$ относительное изменение скорости v_0 во внешних частях обращающего слоя на сравнительно широком интервале r не будет большим. Дифференциальное влияние ускорения силы тяжести в данном случае будет существенным лишь для внутренних частей обращающего слоя и, тем более, для фотосферических областей.

Имея в виду принципиальную важность рассмотренных выше вопросов, повторим еще раз основные положения и выводы: 1) Перед максимумом, около момента $\bar{t}_g$, градиент скоростей в обращающем слое звезды мал; материя фотосферы и обращающего слоя движется примерно с одинаковой скоростью. 2) В момент максимума, а тем более в моменты, за ним следующие, внутри обращающего слоя имеется весьма сильный градиент скоростей, образующийся в основном за весьма короткий промежуток времени $t_m - t_v$. 3) Этот градиент максимален вблизи фотосферы и падает по направлению к периферии. В то же время вплоть до момента t_{pm} во внешней, и притом относительно протяженной области обращающего слоя (до $100 r_\odot$ и выше), наружной границей которой является уровень $r = R_0$, градиент ско-

ростей весьма мал. Эту область с приблизительно постоянной скоростью v_0 мы будем в дальнейшем именовать слоем α . Как мы увидим далее, внутренняя граница этого слоя может быть отождествлена с границей отделения оболочки, для которой $r=r_0$.

Теперь мы рассмотрим основные следствия, вытекающие из только что изложенного.

Наличие в газовой среде большого градиента скоростей означает, что в сфере абсорбционных линий эта среда может стать практически прозрачной. Действительно, в данном случае различные ее элементы поглощают вследствие эффекта Доплера в различных частотах, следуя закону

$$\Delta\nu = \nu \frac{v}{c}. \quad (2,1)$$

Указанное положение может быть целиком перенесено на внутреннюю область обращаемого слоя. Действительно, эта область в момент максимума (и тем более в последующие моменты) должна сделаться практически прозрачной. Правда, следует иметь в виду, что если первоначальная оптическая толща указанной области (опять-таки в сфере абсорбционных линий) была чрезвычайно большой, то некоторая непрозрачность у последней может сохраниться. В этом случае мы будем иметь весьма широкую абсорбционную полосу, заходящую за центральное, несмещенное положение данной спектральной линии. Однако наблюдения никогда не обнаруживали в момент максимума таких абсорбционных эффектов. Следовательно, мы действительно можем считать, что в момент максимума внутренняя область обращаемого слоя становится практически прозрачной. Рассмотрим теперь тот уровень внутри обращаемого слоя с $r \approx r'$, ниже которого влияние градиента скоростей на прозрачность материи в момент максимума яркости уже достаточно велико, т. е. и сам градиент скоростей достаточно велик. Выше уровня $r=r'$ (т. е. между $r=r'$ и $r=R_0$) и будет расположен α слой, ибо, вводя последний, мы как раз считали, что внутри него градиент скоростей относительно мал.

В соответствии со сказанным между уровнем $r=r'$ и фотосферой будет расположена относительно прозрачная полость. Возникновение же этой полости за короткий промежуток времени связано, в свою очередь, с внезапным усилением селективного давления радиации на атомы, расположенные на уровне $r=r'$. Действительно, уже в момент $t=t_m$ на последние падает фактически неослабленная фотосферическая радиация, определяемая потоком πG , по формуле, аналогичной (1.10). Напротив, в моменты, расположенные вблизи $t=t_g$, на рассматриваемые атомы действовал только ослабленный рассеивающей материей поток πF_ν . В частности, ослабляющее действие этой материи, расположенной между r_p и r' , было тем сильнее, чем с меньшим градиентом скоростей она в эти моменты двигалась. Рассматриваемый эффект усиления p'_g мы охарактеризуем следующим отношением.

Пусть полное * селективное давление радиации на рассматриваемые атомы (при $r=r'$) в момент $t=\bar{t}_g$ будет $(p'_\sigma)_{\bar{t}_g}$; пусть такое же в момент $t=t_m$ будет $(p'_\sigma)_{t_m}$. Тогда мы введем следующее отношение:

$$\xi = \frac{(p'_\sigma)_{t_m}}{(p'_\sigma)_{\bar{t}_g}}. \quad (2.2)$$

Очевидно, что ξ почти всегда больше единицы или даже удовлетворяет неравенству $\xi \gg 1$. Лишь в некоторых случаях, которые будут особо рассмотрены в § 4, мы будем приближенно иметь $\xi \approx 1$.

Таким образом, в момент максимума, и даже немного раньше, атомы на уровне $r=r'$ приобретут некоторое и притом достаточно большое положительное ускорение. Величина этого ускорения будет характеризоваться отношением ξ . В результате относительное равновесие в самых внутренних частях нашего α слоя будет нарушено, и они начнут вскоре двигаться со скоростью большей, чем скорость движения основной массы α слоя. Для уяснения этого обратимся к наблюдениям. Последние показывают, что характер предмаксимального спектра в момент максимума таков, что оптическая толща, соответствующая его средним и сильным линиям, в центральных частотах весьма велика. Об этом говорят следующие факты: а) наличие подчас достаточно интенсивных линий, исходящих с высших уровней. Это говорит о том, что линии, начинающиеся с основного уровня, обладают весьма большой оптической толщей в центральных частотах [$\tau_{\nu_0}^\sigma \gg 1$]. б) Весьма высокая интенсивность многих абсорбционных линий (например, Н и К линии и линии серии Бальмера) и т. д. Совершенно очевидно, что основную роль в данном вопросе играет то обстоятельство, что градиент скоростей внутри α слоя весьма мал.

Таким образом, имея в виду сильные и средние линии (а, возможно, в некоторых случаях и слабые), мы можем утверждать, что поток πG_ν , упавший на внутреннюю поверхность α слоя, далеко вглубь него не пройдет. Его непосредственное действие будет вначале ограничено теми поверхностными (с внутренней стороны слоя) частями, для которых $\tau_{\nu_0}^\sigma$ порядка нескольких единиц. Правда, сразу же начнется диффузия радиации в α слое по направлению от центра звезды. Однако хорошо известно, что этот процесс весьма медленный [19]. Поэтому действительно большое дополнительное ускорение от потока πG_ν получит лишь относительно неглубокий (в смысле $\tau_{\nu_0}^\sigma$) слой, который мы назовем β слоем. Вскоре его скорость движения превысит среднюю скорость движения α слоя, в результате чего линейная толщина последнего начнет уменьшаться. Этот процесс, как мы увидим в следующем параграфе, и объясняет те трансформации, которые происходят после максимума, т. е. исчезновение предмаксимальной системы и одновре-

* Полное здесь в том смысле, что учитываются все линии поглощения во всем спектре.

менное появление и развитие главной системы. В частности, из сказанного вытекает, что предмаксимальную систему после максимума следует связывать со слоем α , главную же систему со слоем β . Сейчас же мы рассмотрим ряд дополнительных вопросов, связанных с отделением главной оболочки.

а) Вначале мы обсудим вопрос о границе между отделяющейся оболочкой и той материей, которая остается со звездой. В соответствии с излагавшимся выше мы можем называть внутренней границей отделившейся оболочки тот уровень, для которого в момент максимума $r = r'$. Этот уровень характеризовался у нас тем, что ниже его влияние $\text{grad } v$ на прозрачность находящейся там материи уже достаточно велико. Основания для рассмотрения уровня $r = r'$ в качестве внутренней границы отделившейся оболочки таковы. В самом деле, в момент максимума яркости радиация, падающая на атомы, расположенные ниже уровня $r = r'$, может рассматриваться с известным основанием как фотосферическая, ибо прозрачность материи между уровнями $r = r_p$ и $r = r'$ в этот момент достаточно велика (см. выше). Тем не менее, ускорения, с которыми движутся указанные атомы, являются отрицательными*. Это означает, что для них (для атомов) тяготение играет доминирующую роль. Следовательно, основная часть этой материи с $r \leq r'$ останется со звездой, и лишь самые внешние ее части смогут уйти от звезды достаточно далеко и, даже, возможно, покинуть ее. Напротив, материя, расположенная выше уровня $r = r'$, является совершенно обособленной. Выше мы упоминали, что возникновение и существование особой области с $r \geq r'$ связано, в основном, с тем, что внутри нее дифференциальное влияние тяготения за промежутки времени $t_{pm} - t_v$ относительно мало. Следовательно, основная характеристика этой области — малый градиент скоростей внутри нее. Далее, вполне возможно, что если бы даже не было замены F , на G , все равно большинство атомов, расположенных выше уровня $r = r'$, покинуло бы звезду навсегда. Замена F , на G , является некоторым дополнительным фактором, возникающим в момент максимума. Этот новый фактор делает границу отделения оболочки более резкой, ибо почти внезапно возникает β слой, который начинает удаляться от звезды со скоростью, большей, чем скорость движения α слоя в момент максимума. Поэтому можно утверждать, что благодаря возникновению слоя β все атомы, образующие слой α , обязательно покинут звезду навсегда (см. следующий параграф). На основании сказанного мы можем считать, $r' \equiv r_0$, где r_0 мы отождествляли в предыдущем параграфе с внутренней границей отделившейся оболочки.

В заключение отметим, что, конечно, в момент максимума переход от области с $r < r'$ к области с $r \geq r'$ не является резким, ибо непрерывность в величине v в данном случае соблюдается. Поэтому мы

* И притом достаточно большими.

можем условно считать, что отделение оболочки начинается в момент $t=t_p$, тогда, когда начинает образовываться слой β . Материей же, расположенной ниже слоя β , мы сейчас интересоваться не будем. Полный разрыв в плотности материи может наступить гораздо позже, чем в момент t_p . Однако сейчас же после максимума начинается новое, уже непрерывное выбрасывание материи (правда, в меньших размерах), так что фактически полной пустоты между отделившейся оболочкой и звездой весьма долгое время не бывает.

б) Если описанный механизм возрастания p'_s в момент максимума яркости справедлив, то отделение главной оболочки должно совершаться только и только внутри обращающего слоя. Действительно, только в этом случае мы имеем замену F_v на G_v и образование неравенств $\xi > 1$ или $\xi \gg 1$. Если бы граница раздела помещалась внутри фотосферы, то давление радиации на отделившуюся оболочку не увеличилось бы. Напротив, для звезд, имеющих резко выраженный максимум яркости (NAQI 1918, NLac 1936), оно уменьшилось бы, ибо после максимума сразу же уменьшилась бы L . Однако необходимо отметить, что для достаточно сильного увеличения p'_s должно быть соблюдено еще одно условие. А именно, в области отделения оболочки и ниже ее величина ε_v уравнения (1.18) должна быть перед максимумом и в момент максимума значительно меньше, чем единица. Если это условие не соблюдено, т. е. если в указанных областях ε_v близко к единице, то эти области не будут в моменты, близкие к t_g , являться только поглощающей и рассеивающей средой. Напротив, они будут не только поглощать, но и излучать радиацию. И если в этих областях господствует относительная изотермия, то они будут в центральных частях линий поглощения излучать энергию примерно с той же интенсивностью, что и фотосфера. Поэтому образование ниже $r=r'$ градиента скоростей не изменит заметно p'_s , т. е. ξ будет равно единице.

Таким образом, для того чтобы увеличение p'_s было заметным, необходимо, чтобы одновременно соблюдались следующие два условия: 1) Величина τ'_c на границе отделения должна быть меньше, чем $1/2$. 2) Величина ε_v для указанных выше областей обращающего слоя должна быть меньше, чем единица.

в) Рассмотренный нами механизм увеличения p'_s начинает действовать только в момент максимума блеска и после него, что как раз и следует из наблюдений (post-maximum transformations). Напомним, что это обстоятельство являлось главной трудностью для механизмов Милна и Мак-Кри.

Однако следует отметить, что рассмотренный выше механизм напоминает отчасти механизм Милна тем, что и в данном случае атомы попадают в поле непрерывной радиации. Все же, по существу, оба механизма отличны, ибо в нашем случае основным фактором является отнюдь не возникновение „начальных скоростей“, введенных Милном, а образование градиента скоростей.

г) В заключение мы обсудим следующий вопрос. А именно, в качестве исходных предпосылок, из которых мы исходили в настоящем параграфе, были следующие факты: 1) В момент максимума блеска фотосфера каждой Новой прекращает расширяться и вскоре начинает сокращаться. 2) Внешние части протяженного обращающего слоя звезды (α слой с $r \geq r'$) продолжают удаляться от звезды и после максимума.

Оба эти факта рассматривались нами как вытекающие из наблюдений. В то же время чрезвычайно интересно представить себе хотя бы весьма упрощенную модель соответствующих явлений. Этот вопрос, конечно, весьма труден, ибо он тесно связан с самим механизмом и происхождением вспышки. Однако некоторые соображения в данном отношении все же можно привести. Во-первых, следует указать, что давление радиации как общее, так и селективное, вряд ли здесь играет существенную роль. В самом деле, следует иметь в виду, что фотосфера замедляет свое расширение еще тогда, когда яркость звезды L увеличивается. В то же время во всех мыслимых случаях давление радиации растет с увеличением L .

Должен быть отброшен и такой вариант. Пусть главными факторами, определяющими расширение обращающего слоя перед максимумом, являются: газовый градиент dp/dr и тяготение. Пусть теперь незадолго до максимума фотосфера звезды перестает расширяться (по тем или иным причинам). Тогда под действием гравитации начнут сокращаться те части обращающего слоя, которые примыкают непосредственно к фотосфере. Сжатие этих частей приведет к сжатию частей, еще более высоко расположенных, и т. д. Иначе говоря, в обращающем слое возникнет волна сжатия; последняя прекратит продвигаться лишь тогда, когда она достигнет тех частей обращающего слоя, для которых влияние газового градиента уже ничтожно. Этот вариант должен быть отброшен по следующим причинам. Действительно, совершенно очевидно, что распространение такой волны сжатия в весьма разреженной газовой среде, образующей обращающий слой, * должно происходить весьма медленно. А именно, можно думать, что скорость такого распространения не должна превышать нескольких км/сек. В то же время размеры обращающего слоя у Новых вблизи максимума и, в частности, интересующая нас величина $r' - r_p$ исключительно велики. Так, например, мы увидим, в § 4, что для N Her 1934 величина $r' - r_p$ составляла несколько сот радиусов Солнца. Это означает, что то время, которое требуется для того, чтобы волна сжатия прошла расстояние $r' - r_p$, должно быть весьма большим и, возможно, достигать нескольких сот дней. Напротив, мы уже указывали, что все явления, совершающиеся в спектрах Новых вблизи максимума блеска

* И при относительно небольших значениях g в силу больших значений r во внешних частях обращающего слоя.

происходят в течение относительно небольшого времени, обычно не больше 2—3 дней. Наконец, должен быть отброшен и следующий вариант. Пусть в момент вспышки в центральных частях звезды происходит мощный взрыв, благодаря чему в радиальных направлениях выбрасываются сгустки материи с самыми различными скоростями. Сгустки, движущиеся с большими скоростями, образуют обращающий слой. Сгустки, движущиеся с меньшими скоростями, — фотосферу. Благодаря гравитации со стороны звезды сгустки, образующие фотосферу, вскоре перестанут удаляться от звезды и начнут двигаться назад (момент максимума). Однако и эта модель не является состоятельной. Действительно, в рассматриваемом случае мы имели бы следующий график, изображающий траектории выбрасываемых сгустков (рис. 1). В то же время этот график совершенно не согласуется с наблюдениями. В частности, с точки

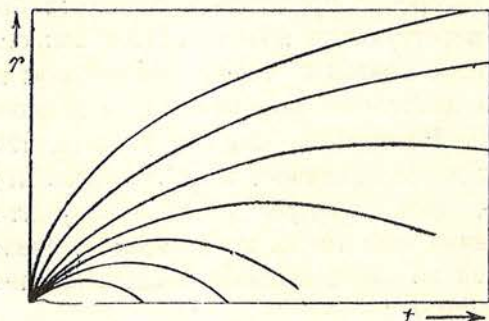


Рис. 1

зрения рассмотренной модели совершенно непонятно резкое увеличение скорости расширения фотосферы перед максимумом у ряда звезд (см. далее), а также практически неускоренное движение фотосферы у *N*Her 1934 в течение весьма большого числа дней после открытия звезды (см. график 5 Беера [15]). Наконец, эта модель не может объяснить отсутствие градиента скоростей внутри обращающего слоя перед максимумом (около $t = t_g$) и т. д.

Таким образом, мы вынуждены обратиться к рассмотрению других моделей. Мы здесь рассмотрим два возможных варианта.

1. Пусть в момент вспышки из центральных частей Новой начинает выбрасываться материя с весьма большой скоростью V . Последняя, в соответствии с выводами автора [9], § 3, должна быть вначале значительно больше, чем скорость расширения фотосферы v_p . Выброшенная материя движется вначале в сильном гравитационном поле звезды. Поэтому, если бы на нее действовало только тяготение, эта материя, возможно, упала бы назад на звезду. Однако этого не происходит, так как выбрасывание материи из звезды носит непрерывный характер. Поэтому в каждой точке образующегося обращающего слоя создается определенный газовый градиент, который является силой, действующей в направлении, противоположном гравитации. В результате к моменту максимума часть материи успевает достичь таких значений r , для которых дифференциальный гравитационный эффект весьма мал ($r \geq r'$). Далее, перед максимумом из звезды выбрасывается в последний раз очень большое количество материи со средней скоростью,

равной приблизительно скорости движения атомов в уже образовавшихся частях обращающего слоя (постоянство v во всем обращающем слое около момента $t=t_g$). Так как процесс выбрасывания прекратился, т. е. снизу „атаки“ отсутствуют, эта материя движется теперь только в гравитационном поле звезды. Поэтому более внутренние ее части, расположенные вблизи фотосферы, движутся с большими отрицательными ускорениями; напротив, в более внешних ее частях (расположенных непосредственно ниже уровня $r=r'$) отрицательные ускорения по абсолютной величине меньше. Тем самым весьма скоро будет образован большой градиент скоростей. Тогда, когда отрицательные ускорения понизят скорость расширения фотосферических слоев до нуля, фотосфера прекратит расширяться, и мы будем иметь максимум блеска.

Возможно, что рассмотренная модель имеет отношение к целому классу новых звезд, к которым в частности принадлежит NAql 1918; у этих звезд скорость расширения фотосферы перед максимумом на много больше, чем таковая же в более ранний период развития звезды (см. [9], § 3).

Поведение фотосферы и обращающего слоя в соответствии с рассмотренной моделью представлено на рис. 2. Линия pp соответствует расширению фотосферы. Наклонные линии, начинающиеся в точках $t_0, t_1, t_2, \dots$, суть траектории частиц, выбрасываемых с поверхности фотосферы в моменты $t_0, t_1, t_2, \dots$. Эти частицы образуют обращающий слой. В моменты, близкие к $t=\bar{t}_g$, скорость движения всех частиц приблизительно равна скорости расширения фотосферы. В момент максимума, когда $t=t_m$, внутри обращающего слоя уже образован заметный градиент скоростей. В этот момент $v_p=0$. В промежутках $t_m - t_i$ скорость каждой выброшенной частицы убывает. Это, как мы видели в § 1, имело место в случае NHer 1934, NAql 1918 ($\frac{dV}{dt} < 0$)

и, возможно, имеет место для всех новых звезд в первый период их расширения, т. е. тогда, когда роль давления радиации во внешних частях обращающего слоя еще не существенна.

На рис. 3 представлен альтернативный случай рассмотренной модели. Наиболее интенсивное выбрасывание материи на рис. 3 происходит в момент $t=t_s$. К моменту $t=t_m$ и здесь внутри обращающего слоя образуется большой градиент скоростей ($v_p=0$). В связи с рассмотренной здесь моделью и, не в меньшей степени, со следующей моделью необходимо отметить весьма существенное обстоятельство. Оно состоит в том, что исключительно важными частями обращающего слоя в смысле образования β слоя и последующих трансфор-

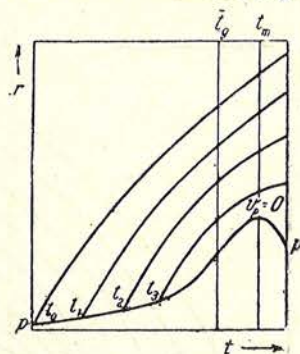


Рис. 2

маций являются части, непосредственно прилежащие к фотосфере звезды и расположенные ниже некоторого уровня $r=r_l$ (конечно, только те слои, где рассеяние радиации уже играет большую роль). В самом деле, предположим, что скорость движения указанных частей и скорость движения внешних частей обращающего слоя (впоследствии α слоя) приблизительно совпадают, но внутри обращающего слоя (где-то по середине) образовался большой градиент скоростей. Тогда, как совершенно очевидно, замены F_v на G_v здесь не будет, ибо рассеивающая материя, расположенная ниже уровня $r=r_l$, будет

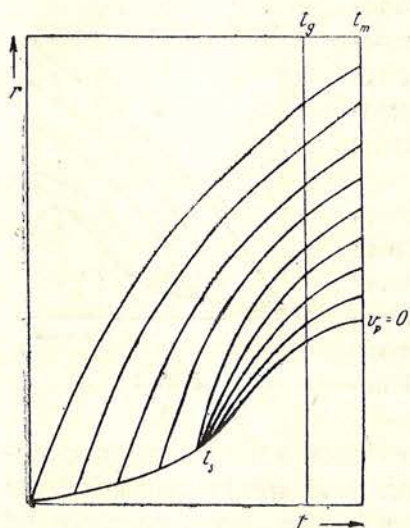


Рис. 3

играть всегда решающую роль. Эта материя будет играть роль экрана, задерживающего фотосферическую радиацию. Поэтому образование β слоя сможет наступить только в момент максимума, т. е. тогда, когда материя, расположенная ниже уровня r_l , заметно замедляет свое движение и внутри нее образуется большой градиент скоростей.

II. Рассмотрим теперь другую модель расширяющегося обращающего слоя. Как можно думать, эта модель имеет отношение к таким звездам, для которых увеличение v_p к максимуму не столь резко выражено. Кроме того, она может иметь место для новых звезд с исключительно протя-

женным обращающим слоем, таким, как, например, N Her 1934.

Дело заключается в следующем. В своей предыдущей работе автор показал, что влияние протяженного обращающего слоя на яркость Новой перед максимумом и в момент максимума яркости пренебрежимо мало [9], § 4. Повидимому, этот факт означает, что распределение плотности материи в самых внутренних частях обращающего слоя перед максимумом имеет весьма концентрированный характер. А именно вблизи $r=r_p$ плотность материи должна весьма резко увеличиваться в направлении к центру звезды. В то же время количество материи, заключенной в основной массе обращающего слоя, должно быть относительно небольшим. Как можно думать, только в этом случае внесение весьма протяженного обращающего слоя в величину L будет ничтожным. Таким образом, переход от фотосферы к обращающему слою должен быть резко выраженным.

В соответствии со сказанным образование фотосферы и обращающего слоя мы должны себе представлять следующим образом. В момент вспышки из более внутренних частей звезды начинает с большой скоростью выбрасываться материя, основная масса которой образует

фотосферу Новой.* Напротив, те атомы, которые обладают скоростью большей, чем средняя скорость фотосферической материи и для которых тормозящее действие последней не оказалось решающим, непрерывно вылетают за пределы сферы $r=r_p$. Они и образуют протяженный обращающий слой. Небольшая масса обращающего слоя обусловлена в связи со сказанным тем, что число указанных атомов, прорывающихся через фотосферу, относительно не велико.

Итак, для образования протяженного обращающего слоя должны иметься в достаточном количестве атомы, имеющие скорость, заметно превосходящую среднюю скорость фотосферических атомов ($V > v_p$ в начале расширения звезды).

В связи с этим основной фактор, характеризующий рассматриваемую модель, таков: мы знаем, что вплоть до момента максимума фотосфера каждой новой звезды непрерывно расширяется. С другой стороны, можно думать, что главным источником материи, выбрасываемой новой звездой вплоть до максимума блеска, являются ее внутренние части. Отсюда следует, что по мере того, как звезда приближается к максимуму, тормозящее влияние фотосферы на интенсивность выбрасывания и скорость движения материи, образующей обращающий слой, непрерывно растет. Действительно, этой материи приходится преодолевать все больший и больший тормозящий слой, характеризуемый, приближенно, величиной r_p . Таким образом, несмотря на то, что размеры фотосферы непрерывно увеличиваются, плотность материи, составляющей обращающий слой, может даже убывать. А именно, в распределении плотности внутри обращающего слоя перед максимумом может создаться инверсия. Плотность будет достигать наибольшей величины в более внешних частях обращающего слоя и в более внутренних, вблизи фотосферы. Наличие внутри обращающего слоя инверсии в величине ρ означает инверсию в величине p , т. е. в средних частях обращающего слоя может быть образован положительный градиент давления.** Наличие же положительного градиента газового давления немедленно приведет к наличию градиента скоростей внутри обращающего слоя еще до максимума. Однако, в соответствии с последним замечанием к предыдущей модели превращение F , в G , и образование β слоя произойдет только в момент максимума (когда $v_p \approx 0$) и в моменты, за ним следующие.

Мы сейчас рассмотрели влияние интенсивности процессов выбрасывания материи на образование градиента скоростей. Однако мы указали, что благодаря увеличивающемуся тормозящему действию фотосферы уменьшается не только интенсивность выбрасывания, но и скорость выбрасываемых атомов, образующих обращающий слой. Это также будет создавать градиент скоростей внутри обращающего слоя, но уже непосредственно.

* Имея в виду, конечно, и ту материю, которая расположена под фотосферой.

** Если r отсчитывается от центра звезды.

Остальные свойства рассматриваемой модели таковы же, как и первой модели. Таким образом, основное отличие второй модели от первой состоит в том, что во второй модели возникает новая дополнительная возможность образования градиента скоростей (перед максимумом). Однако, как только что указывалось, образование β слоя в случае обеих моделей может наступить только тогда, когда начнут сокращаться те части обращающего слоя, которые находятся непосредственно над фотосферой ($cr \leq r_1$). Следует также добавить, что рассмотренный здесь механизм образования градиента скоростей может играть ту или иную роль и в первой модели. На рис. 2 траектории,

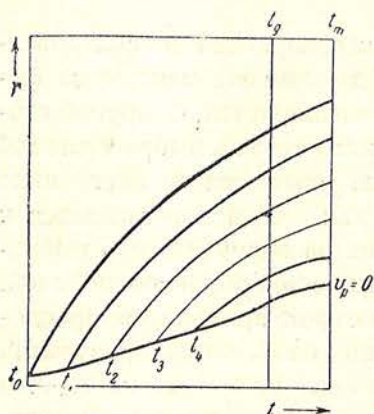


Рис. 4

начинающиеся в моменты t_2 и t_3 , могут быть обусловлены именно рассмотренным здесь механизмом. Наконец, следует добавить, что в обеих моделях фотосфера прекращает расширяться из-за того, что центральный механизм, приводящий к выбрасыванию материи, перестает действовать (или сильно ослабляется).

В качестве графика, описывающего вторую модель, см. рис. 4. Толщина линий, представляющих соответствующие траектории, характеризует интенсивность процесса выбрасывания

материи. В связи с рис. 4 необходимо отметить также следующее обстоятельство. На этом рисунке в момент $t = \bar{t}_g$ скорость движения частиц на всех уровнях примерно одинакова. В то же время в рассматриваемой модели II градиент скоростей может возникнуть еще задолго до момента максимума; таким образом, в средних частях обращающего слоя он может существовать даже в моменты, близкие к моменту $t = \bar{t}_g$. Однако это обстоятельство не находится в противоречии с наблюдениями, ибо мы должны иметь в виду, что узость линий поглощения в спектрах новых звезд перед максимумом блеска есть узость относительная. Поэтому наличие небольшого градиента скоростей внутри обращающего слоя перед максимумом повлияет на ширину линий поглощения незначительно. Действительно, следует помнить, что в моменты, близкие к $\bar{t}_g$, внешние и внутренние части обращающего слоя (а также фотосфера) движутся в рассматриваемом случае (около $t = \bar{t}_g$) примерно с одной и той же скоростью $v \approx v_p$, а поэтому влияние средних, промежуточных частей не может быть здесь большим.

Наконец, на рис. 4 следует обратить внимание на то обстоятельство, что начальная скорость выбрасывания атомов с поверхности фотосферы в моменты $t_0, t_1, \dots, t_i$ убывает по мере увеличения t_i (что характе-

ризуется последовательным уменьшением наклона траекторий в моменты $t_0, t_1, \dots$). Это находится в соответствии с нашими предыдущими замечаниями.

§ 3. ПРОЦЕССЫ, СОВЕРШАЮЩИЕСЯ В ОТДЕЛИВШЕЙСЯ ОТ ЗВЕЗДЫ ГЛАВНОЙ ОБОЛОЧКЕ

Как было показано в предыдущем параграфе, одновременно с отделением главной оболочки на внутренние ее части в сфере линий поглощения, ею создаваемых, начинает действовать поток непрерывной радиации πG_ν . Наибольшим этот эффект будет в центральных частях абсорбционных линий. В крыльях линий замена πF_ν на πG_ν будет, как это совершенно очевидно, менее существенной. Поэтому в дальнейшем мы будем иметь в виду только центральные части абсорбционных линий; оптическая толща для этих частей будет обозначаться как $\tau_{\nu_0}^\sigma$.

Далее, в том же § 2 было указано, что действие потока πG_ν будет вначале ограничено относительно узким внутренним слоем оболочки. Из-за медленной диффузии фотонов глубоко внутрь оболочки этот поток проникнуть не сможет. Поток πG_ν немедленно сообщит указанному внутреннему слою, слою β , некоторое, и как можно предполагать,* достаточно большое дополнительное ускорение (положительное). В результате β слой вскоре начнет двигаться со скоростью большей, чем средняя скорость движения α слоя, т. е. всей основной массы оболочки.

Далее, так как действие потока πG_ν будет носить непрерывный характер, количество материи, принимающей участие в образовании слоя β , начнет непрерывно возрастать. Вскоре оптическая толща β слоя $(\tau_{\nu_0}^\sigma)_\beta$ в центральных частотах средних и сильных линий станет сравнимой с единицей. После этого момента β слой делается способным создавать свои собственные линии поглощения.

Для того чтобы уяснить дальнейшие трансформации в отделившейся оболочке, обратимся к рис. 5.

Рис. 5, I схематически изображает разрез отделившейся оболочки в некоторый начальный момент $t=t_1$, непосредственно следующий за моментом отделения оболочки $t=t_\beta$. До момента $t=t_1$ поток πG_ν действовал на слой β лишь весьма непродолжительное время, так что скорость β слоя, v_β , лишь немного больше, чем средняя скорость движения всей основной массы оболочки, α слоя. На рис. 5 предполагается, что скорость движения материи внутри слоя α постоянна и равна $v_\alpha = \text{const}$. Кроме того предполагается, что эта величина v_α не зависит и от времени. О том, что оба эти предположения оправдываются с известным приближением вплоть до момента $t=t_{pm}$, мы уже

* См. например, вычисления Мак-Кри [6].

говорили в предыдущем параграфе. Далее, на всех трех схемах *I*, *II*, *III* промежуток, обозначаемый буквой γ , является переходным слоем между слоями α и β . О его роли см. далее.

Рассмотрим теперь дальнейший ход событий. Так как, начиная с момента $t=t_\beta$, имеет место неравенство $v_\beta > v_\alpha$, слой β будет непрерывно продвигаться внутрь слоя α ; в результате этого линейная толщина последнего будет непрерывно убывать. Одновременно будет убывать масса α слоя за счет соответственного увеличения массы слоя β . Очевидно, что процесс трансформации слоя α в слой β закончится только тогда, когда верхняя граница слоя β дойдет до верхней

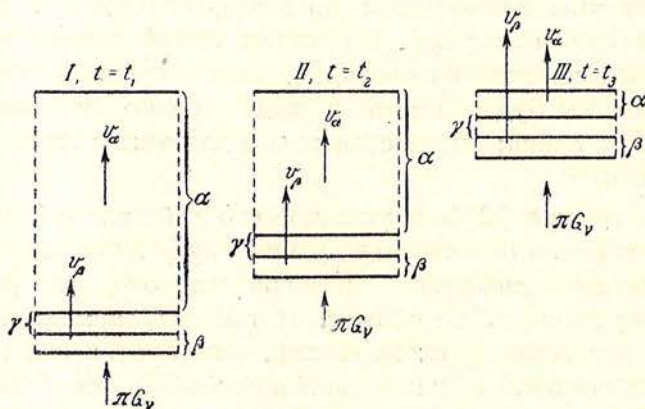


Рис. 5

же границы слоя α . В результате мы будем иметь новую оболочку с линейной толщиной значительно меньшей, чем линейная толщина только что отделившейся оболочки в момент $t=t_\beta$.

Процесс последовательной трансформации слоя α в слой β ($\alpha \rightarrow \beta$ процесс) изображен на дальнейших схемах *II*, *III* рис. 5. На всех трех схемах *I*, *II*, *III* скорость v_α , как мы указывали, остается постоянной. Напротив, дальше будет показано, что в течение всего $\alpha \rightarrow \beta$ процесса скорость v_β или возрастает или (уже к концу процесса) остается постоянной. Таким образом, в момент исчезновения α оболочки новая β оболочка будет обладать той же массой, что и α оболочка в момент t_β , но будет иметь большую скорость, чем начальная скорость v_α . Увеличение скорости v_β указано на схемах *I*, *II*, *III* увеличением соответствующих стрелок.

Прежде чем переходить к дальнейшим выводам, рассмотрим сначала те факторы, которые определяют $\alpha \rightarrow \beta$ процесс.

Во-первых, мы должны принять во внимание передачу импульса путем столкновений. Действительно, те атомы, которые приобрели дополнительный импульс от потока πG_γ и которые движутся уже со скоростью v_β , передают часть этого импульса выше лежащим атомам, увеличивая тем самым среднюю скорость последних (в направлении от центра звезды). Таким образом, могут увеличивать свою скорость

те атомы, на которые поток πG_γ непосредственно не действует. Ниже следующие подсчеты показывают, что рассмотренный фактор может быть, вообще говоря, достаточно эффективным. Возьмем в качестве примера оболочку, отделившуюся от N Her 1934. В работе, которая в ближайшее время будет опубликована, автор настоящей статьи нашел, что плотность материи, составлявшей эту оболочку в момент максимума, была такова, что в 1 см^3 содержалось $N \approx 10^8$ атомов. К такой же цифре приходит и Гротриан [20] (W. Grotrian). Взяв для радиуса поперечного сечения сталкивающихся атомов величину, равную по порядку $\sigma_0 = 10^{-8} \text{ см}$, найдем для длины свободного пробега

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi N \sigma_0^2} \approx 2.2 \cdot 10^7 \text{ см}. \quad (3.1)$$

С другой стороны, как мы увидим в следующем параграфе, минимальная толщина оболочки, отделившейся в момент максимума от N Her 1934, равнялась $\Delta r \approx 60 r_\odot$ (для металлов). Отсюда $\lambda/\Delta r = 0.5 \cdot 10^{-6}$. Следовательно, атом, получающий импульс от потока πG_γ , ни в коем случае не сможет выйти из оболочки беспрепятственно. Напротив, он будет моментально передавать его непосредственно выше расположенным атомам. Очевидно, что другие возможные величины для σ_0 и N вряд ли смогут изменить принципиальное значение полученного результата.

В заключение следует отметить, что, конечно, не весь импульс, сообщаемый потоком πG_γ внутренним частям β слоя, передается внешним частям этого слоя (т. е. частям, расположенным уже в переходном слое γ). Существенная доля этого импульса тратится на увеличение скорости основной массы β слоя (и на преодоление гравитационных сил со стороны основной массы звезды).

Однако нижеследующие соображения показывают, что рассмотренный только что коллизионный фактор не является основным. Повидимому, основным фактором, переводящим атомы из слоя α в слой β , является опять-таки поток πG_γ .

В самом деле, рассмотрим рис. 5 II, описывающий состояние движения оболочки в некоторый более удаленный момент времени $t = t_2$. Пусть в этот момент скорость движения β слоя, т. е. v_β , уже заметно отличается от скорости движения α слоя, v_α . Если полуширина $\Delta \nu_\beta$ линии поглощения, создаваемой слоем β , не слишком велика, то в силу эффекта Доплера, определяемого разностью $\Delta \nu = v_\beta - v_\alpha$, слой β не будет задерживать той фотосферической радиации, которая поглощается атомами, движущимися со скоростью v_α (полушириной линии поглощения мы здесь и в дальнейшем называем уменьшенное вдвое расстояние между теми противоположными точками контура линии, для которых остаточная интенсивность $r_\nu = \frac{1}{2}(1 + r_\nu)$). Таким образом, на атомы, расположенные на внутренней границе α слоя и, следовательно,

входящие в состав γ слоя, будет действовать почти неослабленный поток радиации πG_γ . Под действием потока πG_γ и будут увеличивать свою скорость атомы, образующие слой α . Можно думать, что этот, непосредственно действующий фактор действительно является основным фактором в данном отношении, основным потому, что, как мы только что указывали, часть импульса, приобретаемая слоем β от потока πG_γ , тратится на сообщение ускорения основной массе β слоя.

Сделанный нами только что вывод справедлив, конечно, лишь в том случае, если полуширина $\Delta\nu_\beta$ заметно меньше, чем интервал $\Delta\nu$, определяемый разностью $\Delta\nu = \nu_\beta - \nu_\alpha$. Иначе говоря, β слой должен быть достаточно прозрачным для селективной радиации, поглощаемой слоем α .

Наблюдения показывают, что это условие выполнялось практически для всех исследованных новых звезд. Действительно, во Введении мы указывали, что сразу же после максимума в спектрах новых звезд присутствуют две абсорбционные системы: предмаксимальный спектр (соответствующий α слою) и главный спектр (соответствующий β слою). Обе эти системы обычно являются разделенными. Это разделение существует даже в самый начальный период возникновения β слоя. В качестве примера мы можем сослаться на явления, происходившие в спектре N Her 1934 (см. следующий параграф).

Таким образом, наблюдения говорят нам, что слой β в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса действительно является прозрачным в указанном выше смысле. Это же подтверждает наш вывод о главной роли потока πG_γ в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ трансформации. Следует также добавить, что если бы разделение указанных абсорбционных систем было неполным, все равно вследствие дифференциального эффекта Доплера роль β слоя как экрана, задерживающего фотосферическую радиацию, была бы весьма небольшой.

Непосредственное воздействие потока πG_γ на слой γ характеризуется следующим весьма любопытным условием, дающим верхний предел для скоростей, возникающих в отделившейся оболочке. В самом деле, как только под действием потока πG_γ атомы, входящие в состав переходного слоя γ приобретают скорость ν_β , действие на них этого потока сразу же прекращается, ибо они начинают поглощать фотосферическую радиацию в частотах, определяемых скоростью движения β слоя. Поэтому слой β будет теперь служить для них своеобразным экраном, защищающим их от потока πG_γ . Следовательно, и в дальнейшем эти атомы будут продолжать двигаться со скоростью ν_β , но ни в коем случае не с большей. Этот механизм и будет играть основную роль в процессе перехода атомов из слоя α в слой β .

В заключение мы сделаем ряд замечаний в связи с рассмотренным $\alpha \rightarrow \beta$ процессом.

а) Рассматривая $\alpha \rightarrow \beta$ процесс, мы не приняли во внимание то обстоятельство, что в течение всего времени, занимаемого процессом,

яркость звезды убывает, в связи с чем убывает и величина πG_ν . Наиболее значительным этот эффект становится к концу процесса. Поэтому можно было бы опасаться, что в некоторый момент времени $\alpha \rightarrow \beta$ процесс из-за слабости потока πG_ν остановится. Однако это, конечно, не так. Действительно, согласно Мак-Лафлину [1] исчезновение предмаксимального спектра, т. е. конец $\alpha \rightarrow \beta$ процесса, относится к тому моменту ($t = t_{pm}$), когда яркость типичной Новой падает, считая от максимума, на одну звездную величину. Таким образом, середина $\alpha \rightarrow \beta$ процесса соответствует в среднем тому моменту, когда звезда ослабляется на $0^m.5$. Это соответствует уменьшению πG_ν , грубо говоря, в 1.6 раза (речь здесь идет только о приближенных цифрах, ибо в связи с некоторым изменением температуры u звезды во время $\alpha \rightarrow \beta$ процесса изменение πG_ν для различных ν не одинаково). Даже к концу $\alpha \rightarrow \beta$ процесса, когда яркость звезды уменьшается на $1^m.0$, величина πG_ν уменьшается приблизительно всего в 2.5 раза. Тем не менее, нет никакого сомнения в том, что величина ξ формулы (2.2), характеризующая увеличение p'_α , во всяком случае обычно больше, чем 2.5. Таким образом, указанные опасения не представляются основательными. Более того, сам факт исчезновения системы, образующей предмаксимальный спектр, говорит нам о том, что, действительно, роль замены F_ν на G_ν более существенна, чем ослабление πG_ν .

Далее следует отметить влияние и другого, аналогично действующего фактора. Он сводится к тому, что в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса вся отделившаяся оболочка как целое (т. е. α и β слои) удаляется от звезды. Поэтому в связи с увеличением r поток на оболочку падает в соответствии с законом, аналогичным закону (1.10). Однако данный фактор является совершенно пренебрежимым. Действительно, к моменту отделения оболочки ее среднее удаление от звезды уже так велико, что в течение короткого $\alpha \rightarrow \beta$ процесса, относительное изменение указанного удаления весьма мало.

б) Настоящее замечание имеет отношение как к настоящему параграфу, так и к предыдущему. Речь идет о сравнительной интенсивности предмаксимальной абсорбционной системы до момента максимума и сразу же после этого момента. Мы видели, что перед максимумом блеска, точнее, в моменты, близкие к $t = \bar{t}_g$, абсорбционный спектр Новых — предмаксимальный спектр — создается всем протяженным обращаемым слоем звезды, который расширяется с относительно небольшим градиентом скоростей. Однако в момент максимума во внутренних его частях, расположенных ниже уровня $r = r'$, возникает некоторая прозрачная полость (почему и происходит замена πF_ν на πG_ν). Это означает, что теперь абсорбционный спектр звезды создается уже почти отделившейся оболочкой — слоем α , для которого $r \geq r'$. Следовательно, количество атомов, принимающих участие в образовании предмаксимального спектра, в момент максимума меньше, чем в моменты, близкие к $\bar{t}_g$. Поэтому линии поглощения предмаксималь-

ного спектра в момент максимума должны быть менее интенсивными, чем в момент $t = \bar{t}_g$. Иначе говоря, по сравнению с непрерывным спектром звезды ее абсорбционный спектр за промежуток $t_m - \bar{t}_g$ должен сделаться слабее. Однако этот эффект, как показывают ниже следующие рассуждения, не должен быть особо существенным. В самом деле, мы знаем, что полное поглощение W для какой-либо абсорбционной линии (ее эквивалентная ширина) изменяется с числом атомов N , принимающих участие в процессе поглощения, весьма медленно (мы здесь будем говорить о средних и сильных линиях, ибо для весьма слабых линий W растет приблизительно как число поглощающих атомов). Так, для более сильных линий, где важную роль играет затухание, грубо говоря

$$W \propto \sqrt{N}. \quad (3.2)$$

Напротив, для более слабых линий, где основным фактором является микроскопический эффект Доплера, мы имеем также приближенно

$$W \propto \sqrt{\lg N}. \quad (3.3)$$

В то же время, в § 1 мы указывали, что внутри обращающего слоя, окружающего новые звезды перед максимумом, должен иметься заметный макроскопический эффект Доплера. Совершенно очевидно, что в данном случае зависимость W от N будет гораздо более близкой к закону (3.3), чем к закону (3.2). Следовательно, если даже изменение N за период $t_m - \bar{t}_g$ будет большим, соответствующее изменение W может оказаться весьма малым. Кроме того, следует иметь в виду, что в отделившейся оболочке может возникнуть, хотя и весьма небольшой, но для данного случая существенный градиент скоростей (дифференциальный гравитационный эффект). Этот градиент скоростей будет слегка расширять линии поглощения, создаваемые в момент максимума отделившейся оболочкой. Таким образом, во втором случае величина W может даже слегка увеличиться.

Далее, в промежутке $t_\beta - t_m$ величина W должна быть приблизительно постоянной (дифференциальный гравитационный эффект может только слегка увеличить W).

Из всего сказанного следует, что в тот момент, когда начнется $\alpha \rightarrow \beta$ процесс, абсорбционный спектр звезды будет примерно столь же интенсивен, как и перед максимумом. Это обстоятельство должно весьма способствовать регистрации тех спектральных трансформаций, которые сопровождают указанный процесс.

в) Рассмотрим теперь вопрос об ускорениях и скоростях, характеризующих движение β слоя во время $\alpha \rightarrow \beta$ процесса. Нижеследующие соображения говорят нам о том, что ускорение, характеризующее движение β слоя, будет в течение всего рассматриваемого процесса убывать.

1) В пункте а) мы видели, что величина πG_ν и, следовательно, p'_α в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса непрерывно убывают (в связи с убыванием L). Это же непосредственно ведет к уменьшению ускорения j_β .

2) Рассмотрим тот момент времени, когда в центре средних и сильных линий поглощения, создаваемых β слоем, оптическая толщина $(\tau_{\nu_0}^s)_\beta$ удовлетворяет неравенству $(\tau_{\nu_0}^s)_\beta > 1$. Начиная с этого момента, полное поглощение в отдельных линиях W_i перестает быть пропорциональным числу атомов, создающих эту линию поглощения. Вначале величины W_i следуют закону (3.3), а затем (если N_i достаточно велико) закону (3.2). В то же время величина η формулы (1.20) пропорциональна $\sum W_i G_{\nu_i}$, где суммирование происходит по всем линиям поглощения, присутствующим в спектре.* С другой стороны, масса слоя β пропорциональна величине $\sum N_k$, где суммирование происходит по всем атомам, составляющим β слой (нас, конечно, интересует масса материи, заключенной в столбике, основание которого равно 1 см^2 , а высота равна толщине β слоя). Следовательно, если использовать формулу (1.20), ускорение, сообщаемое радиацией β слою, будет пропорционально выражению

$$j'_\beta \propto \frac{\sum W_i G_{\nu_i}}{\sum N_k}. \quad (3.4)$$

Принимая же во внимание (3.3) и (3.2), мы видим, что с увеличением N_k , т. е. с увеличением массы слоя β , величина j'_β будет уменьшаться. Таким образом, и здесь в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса величина j_β будет непрерывно убывать.

В отношении скорости движения β слоя могут быть сделаны следующие выводы. Вначале j_β велико (и положительно), а, следовательно, вначале увеличение v_β происходит весьма быстро. Затем, в связи с рассмотренными только что факторами, увеличение v_β будет происходить все медленнее, и в конце концов величина v_β может стать даже постоянной. Если благодаря большому уменьшению L к концу $\alpha \rightarrow \beta$ процесса j_β станет отрицательным, величина v_β сможет даже убывать. Однако при этом $\alpha \rightarrow \beta$ процесс не приостановится, ибо одновременно будет убывать и величина v_α . Однако убывание v_β в конце $\alpha \rightarrow \beta$ процесса мало вероятно, ибо мы должны еще учитывать роль общего давления радиации. Действительно, мы увидим далее, что плотность материи, составляющей β слой, на много выше плотности таковой же у α слоя. Это же, как известно, ведет к повышению τ_ν^s и, следовательно, к увеличению общего давления радиации.

г) Мы видели, что с геометрической точки зрения $\alpha \rightarrow \beta$ процесс состоит в том, что в течение всего этого процесса линейная толщина α оболочки непрерывно убывает. Поэтому толщина новой оболочки, образовавшейся по окончании процесса трансформации, т. е. тогда, когда

* G_{ν_i} есть поток G_ν при центральной частоте i -й линии поглощения.

слоем α уже отсутствует, может оказаться на много меньше, чем та толщина, которая характеризовала отделившуюся оболочку в начальный момент, момент t_β . Таким образом, объем новой оболочки может оказаться на много меньшим, чем объем начальной оболочки. В то же время масса обеих оболочек в точности одна и та же. Таким образом, плотность материи, составляющей новую оболочку, может оказаться на много большей, чем плотность исходной оболочки. В то же время уменьшение плотности материи у β оболочки, возникающее из-за непрерывного удаления последней от звезды, в течение всего процесса трансформации, является весьма небольшим. Этот фактор характеризуется, грубо говоря, законом $\rho \sim r^{-2}$. Применение этого закона к случаю NHer 1934 показывает, что благодаря указанному фактору плотность материи за весь период трансформации могла уменьшиться, самое большее, всего в 0.7 раза. Следовательно, как итог можно утверждать, что в конце $\alpha \rightarrow \beta$ процесса отделившаяся оболочка должна стать более плотной.

К сожалению, получить сейчас, какие бы то ни было количественные данные о результирующем увеличении ρ , по окончании процесса трансформации, весьма трудно. Для этого мы должны были бы знать линейную толщину конечной β оболочки.

В заключение следует добавить, что неравенства $\rho_\beta > \rho_\alpha$ или $\rho_\beta \gg \rho_\alpha$ будут, конечно, иметь место не только к концу $\alpha \rightarrow \beta$ процесса, но и в течение всего этого процесса.

д) Рассмотрим основные спектроскопические явления, которые сопровождают $\alpha \rightarrow \beta$ процесс.

В связи с возникновением β слоя в спектре Новой после максимума должна появиться новая система — главный спектр. В тот момент, когда β слой станет способным создавать свои линии поглощения, * его скорость будет уже заметно больше, чем v_α . Поэтому появление главного спектра должно, вообще говоря, иметь дискретный характер; иначе говоря, даже в тот момент, когда главный спектр начинает впервые быть видимым, его смещение заметно отличается от смещения предмаксимального спектра. Далее, так как в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса происходит непрерывное увеличение массы β слоя за счет уменьшения таковой же у слоя α , мы должны при благоприятных условиях наблюдать следующую картину. А именно, весьма скоро после момента максимума (сразу же после момента t_β) абсорбционная система, соответствующая слою α (предмаксимальный спектр), должна начать ослабляться, в то время как интенсивность абсорбционной системы β слоя (главный спектр) должна непрерывно возрастать. Возрастание интенсивности главного спектра прекратится лишь тогда, когда исчезнет предмаксимальный спектр.

* Вначале его масса будет для этого слишком мала (см. начало настоящего параграфа).

Далее, в соответствии с замечанием в) скорость, характеризующая главный спектр, будет в течение всего рассматриваемого периода возрастать или (к концу $\alpha \rightarrow \beta$ процесса) оставаться приблизительно постоянной. Напротив, ускорение, характеризующее главный спектр, будет непрерывно падать (или в конце процесса оставаться равным нулю).

Об ускорениях, характеризующих α оболочку после максимума яркости (предмаксимальный спектр после максимума), можно сказать очень мало, ибо в связи с уменьшением L в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса результирующий эффект зависит от взаимоотношения между полным давлением радиации ($p'_0 + p'_c$) и ускорением силы тяжести.

Некоторые наблюдательные сведения по данному вопросу будут рассмотрены в следующем параграфе в связи с интерпретацией трансформаций в спектре N Her 1934 после максимума.

е) В связи с чисто экспериментальной возможностью достаточно четкой регистрации только что рассмотренных спектроскопических явлений, характеризующих трансформацию слоя α в слой β , перечислим кратко те требования, которые должны быть при этом выполнены:

1) Разность $\Delta v = \frac{v}{c}(v_\beta - v_\alpha)$ должна быть все время больше, чем сумма полуширин линий поглощения, создаваемых слоями α и β . Очевидно, что указанное требование может быть выполнено в следующих случаях: если достаточно велика величина $v_\beta - v_\alpha$, если линии поглощения, связанные со слоями α и β , достаточно узки и резки или, наконец, выполняются оба эти условия. Если же ни одно из них не выполняется, то обе абсорбционные системы α и β будут сливаться в одну и процесс трансформации слоя α в слой β будет вначале характеризоваться лишь специфическим расширением линий поглощения (α системы), направленным в сторону меньших λ , т. е. в сторону ультрафиолетового конца спектра. По окончании $\alpha \rightarrow \beta$ процесса, когда исчезнет менее смещенная α система, наступит вновь сужение линий, но на этот раз со стороны больших длин волн. Результирующий эффект в рассматриваемом здесь случае сведется лишь к тому, что в течение некоторого промежутка времени, смещение предмаксимального спектра будет непрерывно (вплоть до конца $\alpha \rightarrow \beta$ процесса) увеличиваться и притом без видимых следов раздвоения линий.

Здесь же следует добавить, что такое увеличение смещения не обязательно должно закончиться в тот момент, когда α слой исчезнет совсем. Напротив, если давление радиации на вновь образовавшийся (окончательно сформировавшийся) β слой окажется достаточно большим, указанное смещение может продолжать увеличиваться и далее. Впрочем, это последнее обстоятельство должно иметь место и в случае раздельного существования α и β систем. В этом случае β система (главный спектр) будет увеличивать свое смещение

и после того момента, когда предмаксимальный спектр исчезнет совсем.

2) Если требования, рассмотренные в предыдущем пункте, выполнены, то очевидно, что благоприятствовать регистрации процесса трансформации будет также достаточно большая линейная толщина α оболочки в момент t_{β} . Если это дополнительное условие не будет соблюдаться, то процесс трансформации займет слишком мало времени, и при отсутствии непрерывных наблюдений зафиксировать его достаточно уверенно мы не сможем.

О том, как рассмотренные в настоящем пункте требования выполнялись в отношении реальных новых звезд, будет сказано в следующем параграфе.

ж) В заключение настоящего параграфа рассмотрим вопрос о наличии в спектрах новых звезд перед максимумом не одной, а нескольких абсорбционных систем. Совершенно очевидно, что этот вопрос имеет самое непосредственное отношение к тем явлениям, которые происходят при отделении оболочек в момент максимума блеска. Не в меньшей степени он имеет отношение также и к процессу трансформации α и β систем. Не следует, однако, забывать, что разбираемый здесь случай ни в коей мере не является типичным и должен рассматриваться скорее, как исключение. Как мы уже указывали (см. § 1), наличие нескольких абсорбционных систем до максимума наблюдалось у N Gem 1912 и N Cyg 1920, а также N Lac 1936, см. [36]. У первой из этих звезд наблюдались две абсорбционные системы. У второй звезды наблюдались три системы; из них одна (система II в обозначении Болдуина [12]) представлена до максимума одной точкой (для водорода), причем связь этой системы с системами, зарегистрированными после максимума, не вполне уверена (см. следующий параграф).

В спектрах остальных звезд в моменты, непосредственно предшествующие максимуму, наблюдалась единственная система линий поглощения. В частности, существование в спектре N Her 1934 в более ранний период ее расширения двух систем: одной, определяемой водородом, а другой — металлами, нас сейчас не интересует. Действительно, к моменту максимума яркости, т. е. тогда, когда начался процесс отделения оболочки, мы уже имели фактически одну систему, характеризующую скоростью, равной примерно 170—180 км/сек. Сам по себе факт существования нескольких абсорбционных систем в спектрах новых звезд до максимума не представляет ничего удивительного. Совершенно очевидно, что в данном случае мы имеем дело с весьма заметной неоднородностью в динамической структуре протяженного обращающего слоя, окружающего расширяющуюся Новую. При этом не обязательно наличие указанной неоднородности охватывает всю оболочку звезды (в смысле распределения неоднородности по всей сфере 4π); напротив, не исключается и такая возможность, когда наиболее резким образом выраженная неоднородность

обращающего слоя у звезды совершенно случайно совпадает по направлению с направлением: наблюдатель — фотосфера. В связи с этими исходными положениями происхождение двух, а в общем случае нескольких абсорбционных систем в спектрах новых звезд до максимума должно мыслиться следующим образом. Повидимому, в этих случаях обращающий слой звезды в указанном направлении: наблюдатель — фотосфера формируется из двух (или нескольких) газовых компонентов, движущихся с различными скоростями. Однако геометрическая сторона данного вопроса есть вещь гораздо более неопределенная. А именно, каким образом в том или ином случае располагаются газовые компоненты, мы сказать почти ничего не можем. Естественнее всего предполагать, что чаще верхние части расширяющегося обращающего слоя включают более высокоскоростной компонент, нижние — менее скоростной. При этом совершенно очевидно, что пространство между такого рода газовыми компонентами не обязательно должно мыслиться пустым. Напротив, оно может быть заполнено промежуточной материей, движущейся со скоростями, меньшими (или в пределе равными), чем скорость более быстро движущегося компонента, но большими (или равными), чем скорость наиболее медленного газового компонента. Наличие такого не особенно большого градиента скоростей должно являться дополнительным абсорбционным фактором. Повидимому, с такого рода абсорбционным фактором мы имели дело при вспышке N Cyg 1920. Как отмечает Болдуин [12], линии поглощения в спектре этой Новой имели отчасти диффузный вид, а пространство между отдельными компонентами было как бы заполнено некоторым абсорбционным „континуумом“, распространявшимся на те спектральные участки, которые включали линии поглощения. Происхождение такого континуума, очевидно, и следует связывать с фактом существования „промежуточной материи“. В связи с тем же вопросом о геометрической локализации рассматриваемых нами газовых компонентов не следует забывать также и такой возможный вариант: он сводится к тому, что указанные компоненты могут двигаться один внутри другого. Соответствующий динамический процесс, характеризующий данный вариант, будет связан с наличием сил внутреннего трения, в результате чего скорость движения рассматриваемых масс будет непрерывно выравниваться (*diffusion drag*). Такой случай мы, повидимому, и имели в начальный период расширения N Her 1934. Характерной отличительной чертой данного варианта является то, что прохождение одного газового компонента через другой должно сопровождаться межатомными столкновениями и, следовательно, наличием весьма интенсивной эмиссии в сфере линий поглощения — факт, целиком подтвержденный на примере N Her 1934.

Существование в обращающем слое новой звезды такой неоднородности, какая нами здесь рассматривалась, совершенно не меняет всех наших принципиальных соображений, содержащихся в настоящем и

предыдущем параграфах. Очевидно, что в данном случае, как механизм отделения оболочек, так и процесс трансформации слоя α в слой β останутся теми же самыми. При этом, однако, следует различать два совершенно специфических варианта. Ради простоты нижеследующих рассуждений мы ограничимся наличием только двух газовых компонентов.

Первый вариант. Неоднородность обращающего слоя Новой до максимума обусловлена, в основном, наличием двух газовых компонентов, располагающихся один над другим. В этом случае основные явления зависят от того, где расположена граница отделения оболочки ($r = r'$). Конечно, гораздо более вероятен вариант, когда эта граница расположена внутри нижнего компонента, который, собственно говоря, и является обращающим слоем звезды в данном направлении. После процесса отделения оболочки и $\alpha \rightarrow \beta$ процесса (что ведет к увеличению скорости движения указанной оболочки) эта оболочка может нагнать верхний компонент и увлечь его за собой, в результате чего последний исчезнет. Однако, конечно, последовательность событий может оказаться совершенно другой. Поэтому, с точки зрения наблюдений, каждый отдельный случай должен рассматриваться весьма тщательно.

Второй вариант. Неоднородность обращающего слоя Новой до максимума обусловлена в основном наличием двух газовых компонентов, располагающихся над расширяющейся фотосферой в двух различных направлениях ϑ_A и ϑ_B . Оба эти направления захватывают направления: наблюдатель — диск фотосферы (различные точки диска). В данном случае все явления опять-таки будут зависеть от того, где проходит граница отделения оболочки. Если для обоих направлений эта граница будет расположена внутри газовых компонентов, то мы можем получить после процесса отделения две β оболочки, движущиеся со скоростями $(v_\beta)_{\vartheta_A}$ и $(v_\beta)_{\vartheta_B}$. Если основная масса одной из β оболочек движется под достаточно большим углом к линии: наблюдатель — центр звезды, то вполне возможно, что она скоро перестанет проектироваться на диск фотосферы звезды. Тогда эта β оболочка не будет закрывать от нас фотосферу, и, следовательно, абсорбционная система, соответствующая оболочке, исчезнет.

Так же как и в предыдущем варианте, имеется весьма большое количество разнообразных возможностей. Поэтому весь этот вопрос мы здесь разбирать подробно не будем. Более конкретные соображения в данном отношении содержатся в следующем параграфе (N Gem 1912 и N Cyg 1920).

§ 4. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

Наиболее важным и на первый взгляд загадочным явлением, наблюдающимся в спектрах новых звезд сразу же после максимума, является замена предмаксимального спектра главным спектром. Из

наблюдений следует, что этот процесс носит дискретный характер в момент появления главного спектра, и вплоть до момента исчезновения предмаксимального спектра обе абсорбционные системы, соответствующие указанным спектрам, оказываются обычно достаточно хорошо разделенными. Ранее считали, что эти трансформации, включающие одновременное существование двух абсорбционных систем, совершаются только в спектрах медленных Новых (N Pic 1925 и N Her 1934). Однако в последнее время Мак-Лафлин [1] показал, что это имеет место также и для быстрых Новых (N Aql 1918 и N Lac 1936). Обнаружить соответствующие явления в спектрах быстрых Новых не удавалось из-за их быстроты. Кроме того, у N Lac 1936 в некоторых частях ее спектра имело место сильное блендирование размытых линий. Таким образом, как утверждает в указанной статье Мак-Лафлин, замена одного спектра другим с большим смещением может рассматриваться как типичный закон для быстрых и для медленных Новых. Далее, Мак-Лафлин отмечает, что обычно предмаксимальный спектр исчезает сразу же после того, как главный спектр становится достаточно развитым.

В предыдущем параграфе мы видели, что описанные здесь явления могут быть вполне удовлетворительно объяснены с точки зрения $\alpha \rightarrow \beta$ трансформации в отделившейся главной оболочке. Однако спектр почти каждой новой звезды после максимума обнаруживал те или иные особенности или некоторые отклонения от стандартного закона. Поэтому мы рассмотрим весь имеющийся материал по отдельным звездам более подробно. Особенное внимание будет обращено на трансформации, происходившие после максимума в спектре N Her 1934. В этом, последнем, случае представляется возможным проверить все те заключения об ускорениях и скоростях, характеризующих движение α и β слоев, которые были нами сделаны в конце предыдущего параграфа.

Кроме того, на основании соображений, изложенных в § 3, мы вычислим линейную толщину оболочки, отделившейся от N Her 1934.

Теперь мы перейдем к рассмотрению отдельных Новых.

N Per 1901. Спектроскопические данные в отношении этой звезды весьма скудны. До максимума блеска лучевые скорости у нее вообще отсутствуют. Мы приводим здесь краткую выдержку из табл. III работы Стрэттона [21] (F. J. Stratton). Она содержит данные о луче-

Дата Февраль	H_{γ}	H_{β}	Дата Март	H_{γ}	H_{β}
23	—700	—	1	—1500	—
24	—	—1280	3	—1550	—
25	—1300	—1560	5	—1600	—
26	—1500	—1800	6	—1450	—
28	—1500	—1700	—	—	—

вых скоростях для водорода. Эти данные приведены по линиям H_γ и H_β в отдельности, так как для обеих линий они слегка отличаются друг от друга. Скорости выражены в км/сек. Напомним, что максимум блеска у этой звезды приходится на 23 II. Процесс преобразования слоя α в слой β у этой звезды согласно выписанной таблице характеризовался весьма большим увеличением скорости в течение первых 24 час. после максимума. С 24 II до 26 II увеличение скорости происходило гораздо медленней, после чего вообще прекратилось. В течение периода увеличения скорости, начиная с момента максимума блеска, наблюдалось расширение линий поглощения. Этого и следовало ожидать с точки зрения соображений, изложенных в пункте е) предыдущего параграфа. Разделения линий поглощения, образуемых слоями α и β , здесь не наблюдалось. Однако вероятнее всего считать, что это было связано или с недостаточной дисперсией использованных инструментов, или с наличием чисто фотографических эффектов, приводящих к блендированию.*

N Gem 1912. Эта звезда (вместе с N Cyg 1920) является исключением из общего правила в том отношении, что в ее спектре перед максимумом наблюдалась не одна, а две абсорбционные системы. Основываясь на неопубликованных скоростях, полученных по спектрограммам обсерватории Апп—Арбор от 13.6 III (перед максимумом), Мак-Лафлин [10] приводит для этих систем следующие данные: для системы 0 (в его обозначении) $v = 360$ км/сек; для системы I: $v = 500$ км/сек. В отношении спектроскопических трансформаций, наблюдавшихся здесь после максимума, могут быть приведены следующие соображения. Мак-Лафлин [1] считает, что в случае N Gem 1912 предмаксимальный спектр почти полностью исчез, перед тем как появился главный спектр. Кроме того, он считает, что скорость, характеризовавшая главный спектр в момент его появления, равнялась 800 км/сек. Повидимому, эти заключения основаны на графике лучевых скоростей, опубликованном Райтом [22] (W. H. Wright). Исходя из этого графика, можно предположить, что главный спектр появился 18.5 III и почти к этому же моменту исчез предмаксимальный спектр.

Однако автор настоящей статьи несогласен с вышеизложенной интерпретацией. Напротив, имеются основания считать, что главный спектр появился не позже 16.0 III, а возможно даже немного раньше. В то же время кривая, изображающая изменение скорости для этого компонента сразу же после указанного момента, должна быть отождествлена с кривой с аналогичного графика Стрэттона [23]. Скорость, характеризовавшая рассматриваемый компонент в момент его появления (16 III), была равна ~ 1350 км/сек.

* В последней работе Мак-Лафлина показывается, что и для данной звезды имел место нормальный $\alpha \rightarrow \beta$ процесс, см. [39].

Напротив, изолированная точка при $t = 18.5$ III и с $v = 800$ км/сек, присутствующая на вышеуказанном графике Райта, должна быть рассматриваема как случайная и принадлежащая какому-либо вторичному компоненту, а не главному спектру. В пользу изложенной здесь интерпретации спектральных трансформаций говорят следующие обстоятельства. 1) Как правило, не имеющее исключений, главный спектр появляется после максимума весьма скоро, очень часто через несколько часов и во всяком случае не дольше, чем через 1—2 дня вслед за этим моментом. В то же время указанная точка при $t = 18.5$ III отстоит от максимума (~ 14.0 III) приблизительно на $4^d.5$. 2) Сразу же после максимума в спектре N Gem 1912 наблюдались явления торможения, продолжавшиеся несколько дней. Далее мы покажем, что эти явления имели, повидимому, одну общую причину. Поэтому естественно предположить, что и главный спектр (система c по Стрэттону) испытал те же явления торможения; за период с 16.0 III до 21 III скорость, характеризовавшая этот спектр, уменьшилась с 1350 км/сек до приблизительно 800 — 900 км/сек. В связи со сказанным следует объяснить довольно продолжительное существование предмаксимального спектра после максимума. Согласно Райту этот спектр существовал по линиям водорода и металлов до 17 III, по линиям Ca^+ — до 18.5 III. Согласно же Стрэттону по линиям водорода этот спектр существовал даже до 22 III. Для объяснения этого обстоятельства можно предложить весьма большое количество разнообразных гипотез.

Мы здесь рассмотрим одну из возможных. А именно, мы примем во внимание то обстоятельство, что перед максимумом в спектре данной Новой наблюдались две абсорбционные системы. Вполне естественно предположить, что одна из этих систем соответствовала обращающему слою, в то время как вторая система соответствовала некоторому изолированному облаку, двигавшемуся со скоростью, отличной от средней скорости расширения обращающего слоя [см § 3, пункт ж)]. Обратимся к рис. 6. Этот рисунок представляет предполагаемый разрез N Gem 1912 в моменты, близкие к моменту $t = t_g$. Обозначения на рис. 6 (r_p , r' , R_0) взяты из предыдущих параграфов. Обращающий слой, представленный заштрихованной площадью, движется со средней скоростью v_s , близкой к скорости движения фотосферы v_p . Прямоугольник $aaaa$ есть указанное изолированное облако, движущееся в направлении SB со скоростью v_a . S — центр звезды, SA — направление: центр звезды — наблюдатель.

После максимума яркости материя, расположенная выше уровня $r = r'$, отделится от звезды и вскоре будет образован плотный β слой, движущийся со скоростью $v_\beta > v_s$. Напротив, в общем случае скорость облака $aaaa$ после максимума не увеличится. В самом деле, так как перед максимумом $v_s \neq v_a$ и обе абсорбционные системы, связанные со скоростями v_s и v_a , наблюдаются разделенными, материя,

расположенная между облаком *aaaa* и уровнем r_p , не задерживает фотосферической радиации, поглощаемой этим облаком в центральных частотах спектральных линий. Иначе говоря даже в моменты, близкие к $t = \bar{t}_g$, на внутреннюю поверхность облака *aaaa* падает неослабленная фотосферическая радиация. Поэтому в момент максимума положение не изменится. Напротив, в связи с убыванием L после максимума сила p' , действующая на облако *aaaa*, должна даже уменьшиться. Это все эквивалентно тому, что величина ξ формулы (2.2) в момент максимума равна единице. То же самое относится и к величине ω формулы (1.22).

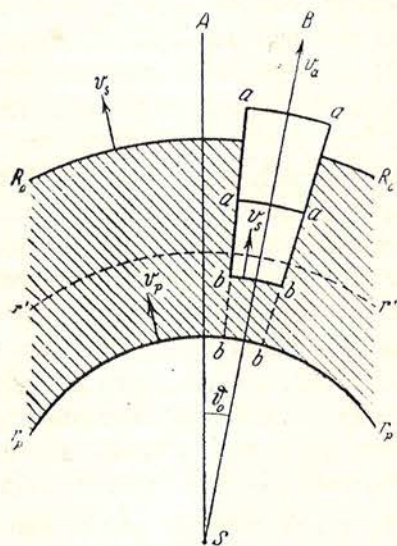


Рис. 6

Таким образом, после максимума мы будем иметь новую абсорбционную систему — главный спектр, характеризующийся скоростью $v_b > v_s$, и абсорбционную систему облака, соответствующую прежней скорости v_a или, в связи с убыванием L , даже меньшей (лишь в том случае, если между нижним основанием облака *aaaa* и фотосферой было до максимума некоторое количество материи, движущейся со скоростью, близкой к v_a , скорость v_a может немного увеличиться).

На рис. 6 предполагается, что $v_a > v_s$. Однако вполне возможен случай, когда $v_a < v_s$. В самом деле, можно предположить, что в начальный период расширения звезды облако *aaaa* было выброшено из звезды в направлении SB со скоростью, на много большей, чем средняя скорость движения всей остальной материи. Таким образом, непосредственно ниже его оказалась пустота. Это же означает, что во время дальнейшего движения облака газовое давление снизу на него не действовало.

Благодаря этому начальная скорость облака $v = v_a^0$ могла к моменту $t = \bar{t}_g$ понизиться до величины, удовлетворяющей неравенству $v_a < v_s$.

Нам остается еще объяснить, почему компонент d (соответствовавший облаку *aaaa*) относительно быстро исчез. А именно, мы уже указывали, что даже согласно Стрэттону этот компонент перестал быть видимым, начиная с 22 III. Повидимому, исчезновение компонента d связано с тем, что облако *aaaa* двигалось по отношению к направлению SA под некоторым углом θ_0 . Поэтому через некоторый промежуток времени оно перестало для наблюдателя проектироваться на видимый диск фотосферы.

Однако, конечно, исчезновение системы d может быть связано также и с тем, что благодаря удалению облака от звезды его оптическая толща в центральных частях линий поглощения стала весьма малой.

В заключение мы рассмотрим следующий вопрос. Как мы уже указывали ранее, в спектре N Gem 1912 после максимума в течение некоторого периода времени наблюдались явления торможения. Это очень хорошо видно на указанном графике Стрэттона (компоненты c — главный спектр и d — остаток предмаксимального спектра. Что же касается системы b , то она является диффузно-искровым спектром и о ней мы будем говорить в § 5).

Для объяснения явлений торможения в спектре N Gem 1912 было предложено много гипотез. Однако все они при внимательном рассмотрении по той или иной причине оказываются неприемлемыми. Более подробно весь этот вопрос будет обсуждаться автором в специальной статье, посвященной массам новых звезд.* Здесь же мы укажем только наиболее вероятную причину, вызвавшую указанные явления.

Оказывается, что сразу же после максимума данная звезда обнаружила аномально быстрое падение в яркости. Это очень хорошо видно на кривой яркости, построенной Кэмпбеллом [24] (L. Campbell).

Падение яркости через день после максимума оказалось здесь более быстрым, чем возрастание яркости непосредственно перед максимумом. Нормальное падение яркости началось лишь с 30 III после ряда флуктуаций в величине L . В то же время аномально быстрое падение L после максимума означает аномально быстрое убывание давления радиации (общего и селективного). Поэтому материя, составлявшая только что образовавшийся β слой и изолированное облако $aaaa$, оказалась подверженной почти только одному гравитационному воздействию со стороны центральной звезды. Это же немедленно привело к описанным явлениям торможения.

О том, что во всем этом основную роль играло взаимодействие между давлением радиации и тяготением, говорит следующее обстоятельство. А именно, хорошо известно, что для звезд спектральных типов, близких к солнечному, и в частности для спектров F_5 и A_5 (составной спектр N Gem 1912 сразу же после максимума, см. [1]), наиболее подвержены селективному давлению радиации атомы Ca^+ . В то же время упомянутый график Райта показывает, что для системы d , по Стрэттону, атомы Ca^+ вели себя совершенно отличным от остальной материи образом: А именно, скорость, связанная с линиями Ca^+ , убывала после максимума гораздо медленнее, чем скорость,

* Вопрос о торможении оболочек у Новых и, в частности, у N Gem 1912, рассмотрен автором в его других работах [37], [38].

соответствующая остальным элементам системы. Это же означает, что именно для атомов Ca^+ давление радиации в гораздо большей степени компенсировало тяготение, чем для остальных атомов; это в связи со сказанным представляется совершенно понятным.

N Aql 1918. Наиболее полный график кривых лучевых скоростей для этой звезды как вблизи максимума, так и для дальнейшего периода содержится в работе Уайза [11]. Этот график мы воспроизвели в § 5 в связи с обсуждением диффузно-искрового спектра для данной звезды (см. рис. 11). Согласно этому графику $\alpha \rightarrow \beta$ процесс характеризовался тем, что за сутки, предшествовавшие максимуму, предмаксимальный спектр звезды уменьшил свое смещение, в то время как после максимума смещение этой системы в течение 2 дней сильно увеличилось. Затем это смещение возрастало уже медленнее, после чего практически не изменялось. Таким образом, согласно рассматриваемому графику предмаксимальный спектр и главный спектр раздельно не наблюдались.

Однако, как мы уже указывали, Мак-Лафлину по спектрограммам Мичиганской обсерватории удалось обнаружить такое разделение. Таким образом, для данной звезды процесс преобразования слоя α в слой β имел нормальный характер. Более подробными сведениями по данному вопросу автор настоящей статьи пока не располагает.

N Cyg 1920. Наиболее детальное спектроскопическое исследование по данной звезде выполнено Болдуином [12]. Мы здесь воспроизводим его график лучевых скоростей, построенный для водорода (рис. 7). Как мы уже неоднократно указывали, в спектре N Cyg 1920 (так же как и в спектре N Gem 1912) имелось перед максимумом несколько абсорбционных систем.

Для систем 0 и I связь между отдельными точками до максимума с точками после максимума вполне определена. Напротив, для системы II первая точка, приходящаяся приблизительно на 22.5 VIII, т. е. расположенная перед максимумом, возможно, не связана с точками той же системы после максимума. Действительно, на следующий день система II для водорода не видна. В то же время для металлов отсутствует точка для 22.5 VIII. Однако возможно, что эти факты имеют случайный характер.

Система III впервые зарегистрирована весьма незадолго до момента максимума, а именно около 23.5 VIII (максимума яркости звезда достигла к концу 23 VIII). Таким образом (если не связывать системы, наблюдавшиеся перед максимумом, с системами, наблюдавшимися после максимума), до максимума были зарегистрированы три системы 0, I, II. Появление системы III следует отнести скорее уже к самому максимуму.

О наличии в спектрах новых звезд перед максимумом нескольких абсорбционных систем мы уже говорили в пункте ж) предыдущего параграфа. Там же мы указали, что для объяснения этих отклонений

от общего закона может быть выдвинуто большое число разнообразных вариантов. В частности, для объяснения исчезновения после максимума систем 0 и I могут быть предложены два таких варианта:

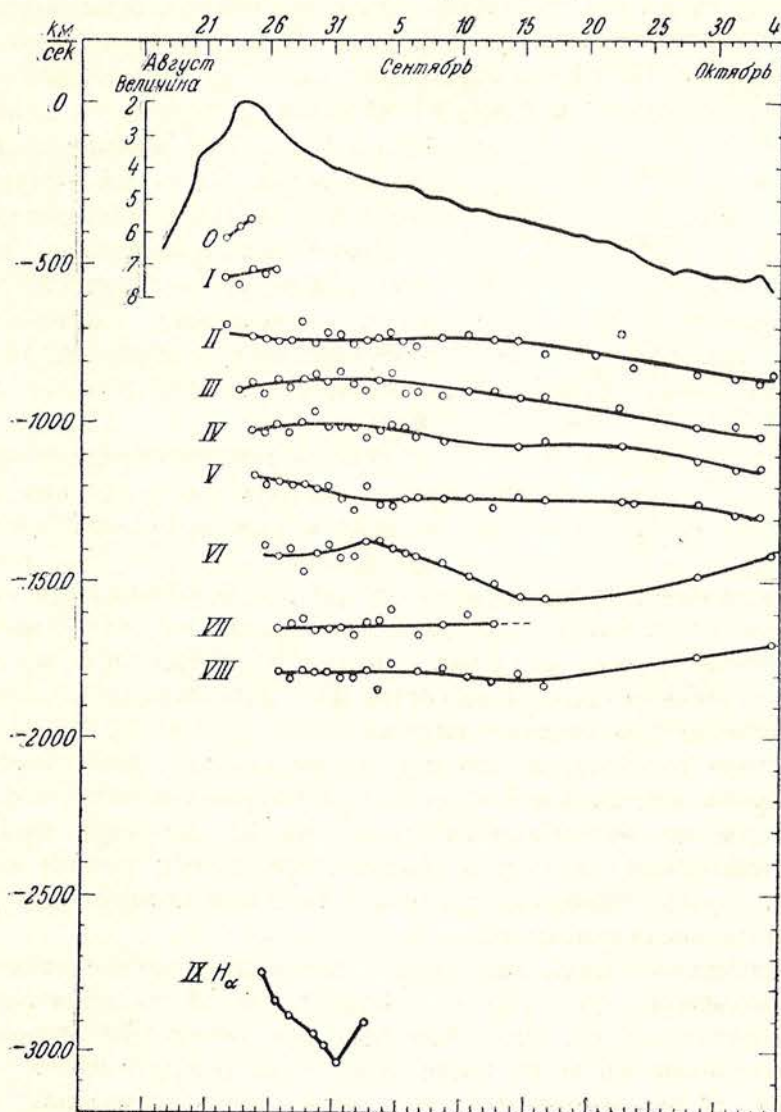


Рис. 7

1) Пусть основная масса обращающего слоя перед максимумом представлена системой 0, в то время как система I связана с каким-то изолированным облаком, движущимся над обращающим слоем. Когда внешние части обращающего слоя после максимума превратились в β оболочку, система 0 исчезла; так как скорость новой β оболочки могла оказаться весьма большой, эта оболочка могла скоро

догнать указанное изолированное облако, представленное системой I, и увлечь его за собой. После этого исчезала и сама система I.

2) Обе системы 0 и I характеризуют расширяющийся обращающийся слой, который в силу некоторой асимметрии явлений вспышки расширяется в двух смежных направлениях с неодинаковой скоростью. С неодинаковой скоростью может двигаться и фотосфера, что вполне возможно, принимая во внимание небольшую разницу в скоростях

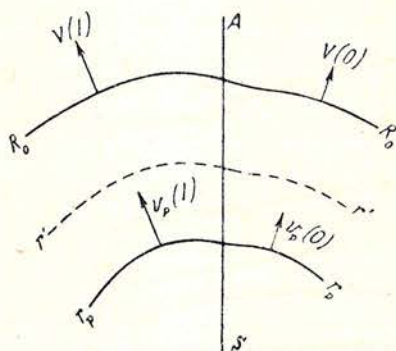


Рис. 8

$V(0)$ и $V(1)$. Этот вариант представлен на рис. 8. Здесь SA — направление: центр звезды — наблюдатель.

После максимума материя, расположенная выше $r=r'$, отделится, и в обоих направлениях произойдет образование двух β оболочек. В соответствии с этим исчезнут обе системы 0 и I.

Решить с полной определенностью, какой из двух рассмотренных здесь вариантов более правдоподобен, весьма трудно.

Благодаря весьма большому числу систем, появившихся в момент максимума и после него, вопрос о том, какая из них главная, является также весьма трудным. Вполне возможно, что мы имели в смысле приблизительного равенства масс две главные оболочки и, следовательно, две главные системы.

Мы здесь рассмотрели две конкретные гипотезы для объяснения исчезновения систем 0 и I. Однако совершенно очевидно, что, привлекая и другие возможные гипотезы, мы всегда будем связывать факт исчезновения этих систем с процессами преобразования слоя α в β слой. Другие возможности здесь приводят к целому ряду трудностей и не так естественны.

В заключение необходимо сделать следующее важное замечание. Вполне возможно, что одна из систем II или III является главной. В то же время эти системы появились или перед максимумом, или в момент максимума, но не после максимума (следует иметь в виду сделанное выше замечание о том, что „предмаксимальная“ точка системы II от 22.5 VIII возможно не связана с системой II после максимума). Таким образом, на первый взгляд это обстоятельство не согласуется с нашей теорией, рассмотренной в § 2 и 3, где показывалось, что образование главной системы может наступить только после максимума.

Однако из этого общего правила могут быть вполне объяснимые исключения. Действительно, вполне возможно, что из-за отсутствия сферической симметрии в процессе расширения звезды, ее фотосфера в направлении: звезда — наблюдатель прекратила расширяться еще

до того, как прекратили расширяться остальные части фотосферы. Тогда заметный градиент скоростей внутри обращающего слоя в указанном направлении будет образован еще до максимума. Следовательно, отделение оболочки и образование β слоя в этом направлении может наступить также до момента максимума.

NPic 1925. Наиболее полные сведения о поведении различных абсорбционных систем в спектре NPic 1925 содержатся в табл. 49 работы Спенсер - Джонса [25] (H. Spenser-Jones).

Звезда достигла своего максимума 7 VI. С 25 V до 5 VI, включительно, в спектре NPic 1925 присутствовала единственная абсорбционная система, показывавшая, приблизительно, постоянное смещение, равное 70 км/сек. За 6 и 7 VI никаких спектроскопических наблюдений не имеется.

Основываясь на вышеуказанной табл. 49, а также на непосредственных замечаниях Спенсер-Джонса (особенно стр. 34—35 и 149 его работы), мы можем сделать следующие заключения по интересующему нас вопросу.

Наблюдения, полученные 8 и 9 VI, т. е. сразу же после максимума, показывают, что спектр звезды весьма отличен от спектра, полученного 5 VI. В отношении 8 VI Спенсер-Джонс на стр. 149 пишет: „Последовал краткий переходный период, в течение которого линии сделались широкими, размытыми и, затем, во многих случаях двойными. Спектр превратился в сложный спектр, содержащий две абсорбционные системы“. Повидимому, в основном период трансформации продолжался 7 и 8 VI, в то время как уже 9 VI спектр звезды более или менее установился. Так, например, 8 VI согласно табл. 49 существовали двойные линии со смещениями 184.0 и 78.8 км/сек. Они давали общее среднее смещение, равное 132.5 км/сек.

Линии со смещением 184.0 км/сек соответствовали образуемому главному спектру (β слой). 9 VI смещение главного спектра стало уже равным 285.3 км/сек, после чего возрастало весьма слабо. Таким образом, период $\alpha \rightarrow \beta$ трансформации окончился приблизительно 9 VI. Ускорение, характеризовавшее главную систему, т. е. β слой, в интервале между 8 VI и 9 VI может быть выведено из вышеприведенных цифр 184.0 и 285.3 км/сек.

Девятого июня, т. е. после периода трансформации, в спектре NPic 1925 оказался видимым не только главный спектр (система II по Спенсер-Джонсу) со смещением 285.3 км/сек, но и два других. Один из них (система III по Спенсер-Джонсу) имел смещение 88 км/сек, другой смещение 53.7 км/сек. Этот последний спектр был обозначен Спенсер-Джонсом также как III, но отличался от спектра с $v=88$ км/сек тем, что был образован только линиями водорода [мы будем обозначать его как *Abs* III (H)]. В связи со сказанным смещение 78.8 км/сек, присутствовавшее 8 VI, составлялось из предмаксимального спектра и из образуемого спектра III.

Оба указанных спектра III и III (H) были зарегистрированы в последний раз 18 VII. В среднем за весь период существования этих систем смещение Abs III соответствовало ~ 110 км/сек, а смещение Abs III (H) мало отличалось от смещения предмаксимального спектра, [смещение Abs III (H) незначительно колебалось вокруг своего среднего значения]. Ввиду этого мы можем считать Abs III (H) как остаток предмаксимального спектра.

Обратимся к вопросу о происхождении абсорбционной системы III, основная особенность которой состоит в том, что скорость, ее характеризовавшая, была меньше, чем скорость, характеризовавшая главный спектр. Рассмотрим два возможных варианта.

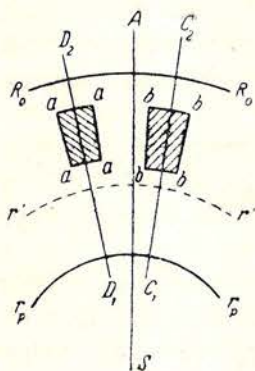


Рис. 9

1) Обратимся к рис. 9. Направление SA , как обычно, есть направление: центр звезды — наблюдатель. Пусть в направлении D_1D_2 , составляющем небольшой угол с направлением SA , движется некоторое облако $aaaa$, и пусть скорость движения этого облака перед максимумом (около $t = t_g$) приблизительно равна средней скорости расширения обрабатываемого слоя. Основное свойство, которое мы будем связывать с облаком $aaaa$, сводится к следующему. Мы

будем считать, что плотность материи в этом облаке, ρ_a , заметно отличается от плотности ρ_s материи в обрабатываемом слое (конечно, мы сравниваем плотность для одних и тех же значений r). В то же время различие в плотности материи вызывает различие в давлении радиации на эту материю (более подробно см. § 6).

Обратимся теперь к сжатию отделившейся оболочки после максимума. Основная масса этой оболочки по окончании $\alpha \rightarrow \beta$ процесса приобретает скорость v_β^s . Однако $\alpha \rightarrow \beta$ процесс будет иметь место и в направлении D_1D_2 . В результате этого процесса материя в направлении D_1D_2 также сожмется и, в конце концов, будет двигаться с некоторой скоростью v_β^a , и, так как плотность материи, участвовавшей в обоих процессах, была различной, будут отличаться и величины v_β .

Как мы увидим в § 6, здесь возможны два случая, представленные неравенствами $v_\beta^a > v_\beta^s$ и $v_\beta^a < v_\beta^s$. Здесь все зависит от различия между ρ_s и ρ_a . Однако в том же § 6 будет показано, что сделать определенные заключения о зависимости между v_β и ρ представляется в настоящее время весьма затруднительным. Поэтому мы просто примем, что различие между ρ_s и ρ_a было таким, что после $\alpha \rightarrow \beta$ процесса оказалось, что $v_\beta^a < v_\beta^s$. Это и объясняет происхождение абсорбционной системы III. Если бы оказалось, что $v_\beta^a > v_\beta^s$, мы бы наблю-

дали после максимума вторичную систему со смещением большим, чем смещение главного спектра.

Рассмотрим теперь вопрос о происхождении системы III (H). Пусть в другом направлении C_1C_2 (см. тот же рис. 9) движется аналогичное облако $bbbb$, состоящее практически из водорода. Но мы знаем, что для интересующих нас температур селективное давление радиации на водород гораздо менее эффективно (в смысле сообщения ему ускорения), чем на многие другие элементы. Но тогда по окончании $\alpha \rightarrow \beta$ процесса скорость движения облака $bbbb$ может практически остаться той же самой, т. е. мы будем наблюдать систему $Abs\ III(H)$. Кроме того, вполне возможно, что и здесь большую роль играло влияние плотности, рассмотренное в случае облака $aaaa$.

2) Рассмотрим второй вариант. Пусть внутри обращающего слоя реализуется случай, представленный на рис. 6, но пусть, грубо, выполняется равенство $v_a \approx v_s$ (мы видели, что возможны случаи $v_s > v_a$ и $v_s < v_a$, а следовательно, возможен случай $v_s \approx v_a$). Далее пусть количество рассеивающей материи в пространстве $bbbb$ относительно мало, так что после момента $t = t_v$ отличие G_v от F_v для облака $aaaa$ относительно не велико (т. е. величина ξ формулы (2.2) мало отличается от единицы). Тогда увеличение скорости у рассматриваемого облака после момента максимума будет весьма небольшим, т. е. мы будем наблюдать $Abs\ III$.

Если в дополнение к сказанному другое такое же облако $aaaa$ будет состоять целиком из водорода, то мы получим $Abs\ III(H)$. В рассмотренном здесь случае может появиться вопрос, почему благодаря весьма небольшому ослабляющему действию материи, расположенной между облаками и r_p , в облаках не возникает $\alpha \rightarrow \beta$ процесс еще до максимума. Однако это обстоятельство легко объяснить тем, что для наших облаков состояние равновесия между тяготением и $p'_a + p'_c$ было достигнуто еще во время расширения звезды, и к моменту $t = \bar{t}_g$ оно было уже достаточно полным.

N Her 1934. В отношении интересующего нас вопроса эта звезда является исключительно показательным примером. Линии поглощения в ее спектре были достаточно узкими, а отделившаяся оболочка достаточно толстой (см. пункт е), § 3]. Все спектроскопические явления, сопутствующие преобразованию слоя α в слой β , наблюдались в данном случае весьма отчетливо.

На примере данной звезды мы можем проверить все те теоретические предсказания, которые были нами сделаны в предыдущем параграфе. Как мы сейчас увидим, эти предсказания оправдываются здесь достаточно хорошо.

Наиболее полные и интересные данные о тех трансформациях, которые происходили в спектре рассматриваемой звезды вблизи максимума, содержатся в работе Меррилла [26] (P. Merrill), которая основана на спектрах, полученных на обсерватории Маунт Вильсон.

Эта работа может рассматриваться как наиболее существенная для всего настоящего исследования.

Преобразование предмаксимального спектра в главный представлено Мерриллом отдельно на рис. 1 его работы. Мы здесь (рис. 10 настоящей работы) воспроизводим этот рисунок полностью. В виде дополнения мы поместили на нем кривую яркости, согласно Крумпхольцу [27] (H. Krumpholz).

Кроме того, в работе Меррилла содержится весьма показательная фотография (Plate XI), показывающая специально для линий D_1 и D_2

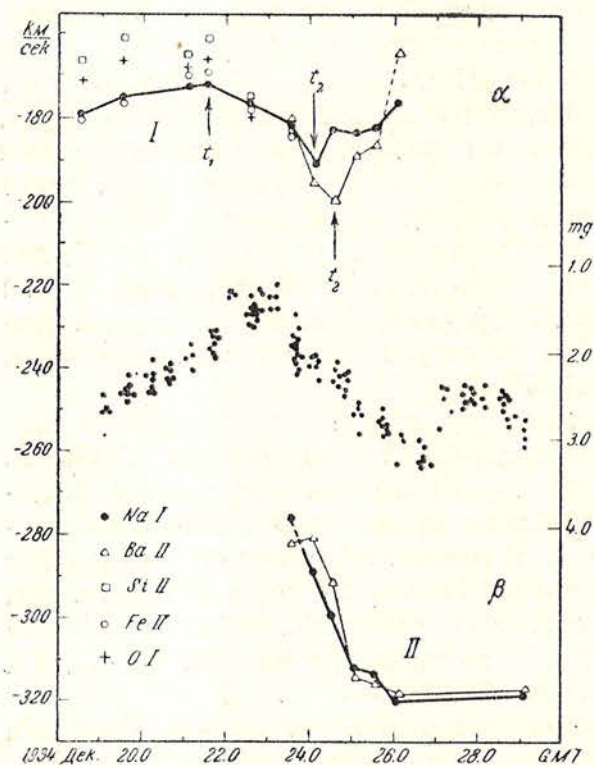


Рис. 10

натрия появление и дальнейшее усиление главного спектра, а также одновременное ослабление и исчезновение предмаксимального спектра.

Имея в виду рис. 10 и указанную фотографию, мы проведем детальное сопоставление теории с наблюдениями.

В соответствии с рис. 10 перед максимумом яркости в спектре Новой присутствовала единственная абсорбционная система — предмаксимальный спектр (компонент I по Меррилу). Смещение, характеризующее этот спектр, было для различных элементов почти одним и тем же. Водород здесь не представлен, но по другим данным (см. кривую

Стрэттона, [13]) смещение для него непосредственно перед максимумом также практически совпадало со смещением для остальных элементов (напомним, что в течение некоторого периода после открытия звезды, приблизительно до 20—21 XII, смещение для водорода и для металлов было различным).

Приблизительно через день после максимума появилась новая абсорбционная система с гораздо большим смещением — главный спектр (компонент II). Начиная с момента появления главного спектра и вплоть до момента исчезновения предмаксимального спектра, обе соответствующие им абсорбционные системы существовали разделен-

ными одна от другой (прозрачность слоя β по отношению к слою α).

С момента появления главного спектра интенсивность предмаксимального спектра в соответствии с указанной фотографией начала убывать за счет возрастания интенсивности главного спектра. Интересно отметить, что в непосредственной близости от максимума яркости интенсивность абсорбционных линий, составлявших предмаксимальный спектр, была достаточно большой и мало отличалась от интенсивности этих линий перед максимумом. Этот факт находится в согласии с соображениями, содержащимися в пункте б) § 3.

Теперь мы рассмотрим вопрос об ускорениях и скоростях, характеризовавших $\alpha \rightarrow \beta$ процесс.

В соответствии с соображениями, изложенными в пункте в) § 3, ускорение, характеризовавшее движение β слоя (компонент II), было вначале весьма большим, но затем оно падало и, начиная с 26 XII, сделалось равным нулю. В то же время скорость движения β слоя вначале быстро возрастала, но с 26 XII сделалась постоянной.

Скорость, характеризовавшая предмаксимальный спектр, также изменялась во время $\alpha \rightarrow \beta$ трансформации. Если эти изменения являются вполне реальными, то их можно объяснить следующим образом. До момента $t=t_1$ (рис. 10) скорость, характеризовавшая компонент I, убывала. Это, повидимому, означало, что для рассматриваемого периода тяготение для оболочки превышало давление радиации и газовое давление снизу. После момента $t=t_1$ и до момента $t=t_2$ (для Ba II этот момент был несколько более поздним, чем для Na I) скорость, характеризовавшая предмаксимальный спектр, возрастала. Повидимому, это было связано с тем, что на весь α слой действовал уже поток πG_γ , а не πF_γ . Поэтому весь этот слой в соответствии с заменой формулы (1.22) на формулу (1.21) приобрел дополнительное ускорение; в результате этого давление радиации превысило тяготение.

Далее, начиная с момента t_2 и до момента исчезновения предмаксимального спектра, скорость, характеризовавшая этот спектр, убывала. Повидимому, это было связано с тем, что влияние уменьшения L на эффективное ускорение α слоя оказалось для рассматриваемого периода более существенным, чем замена πF_γ на πG_γ . Поэтому теперь α слой двигался, главным образом, в поле тяготения звезды. Следовательно, ускорение, характеризовавшее для данного периода α слой, было отрицательным.

Теперь мы рассмотрим следующий вопрос, связанный с вопросами об ускорениях и скоростях.

Из рис. 10 следует, что, начиная с момента $t=t_2$, ускорение слоя α было отрицательным, в то время как для того же периода ускорение слоя β было или положительным, или после 26 XII равнялось нулю. В то же время масса слоя β для этого периода была, наверное,

больше, чем масса слоя α . Поэтому, если основываться на формуле (3.4), можно было бы ожидать, что, наоборот, ускорение слоя β за данный период будет меньше, чем ускорение слоя α . Повидимому, указанные явления связаны с тем, что плотность материи, составляющей β слой, всегда должна быть на много больше, чем плотность материи в слое α . Это же приводит к усилению давления радиации на β слой. Здесь имеются две возможности. Обе эти возможности мы сейчас и укажем.

а) Благодаря большей плотности материи в слое β оптическая толща этого слоя τ_{β}^{ϵ} , измеренная коэффициентом непрерывного поглощения, должна быть больше, чем τ_{α}^{ϵ} слоя α , имеющего такую же массу, но меньшую плотность. Этот принципиальный факт означает, что роль общего давления радиации для слоя β может оказаться гораздо большей, чем для слоя α .

б) Рассмотрим два рассеивающих слоя A и B . Пусть та часть величины η , которая определяется водородом, т. е. η_H , одинакова для обоих слоев. Иначе говоря, мы предположим, что $(\eta_H)_A = (\eta_H)_B$. Далее, предположим, что в отношении плотности материи, составляющей оба слоя A и B , реализуется следующее неравенство: $\rho_A \ll \rho_B$. Но тогда ясно, что благодаря большей ионизации водорода в оболочке A (при прочих равных условиях), количество водородных атомов, образующих эту оболочку, должно быть на много больше, чем число водородных атомов, образующих оболочку B . Только в этом случае мы будем иметь равенство $(\eta_H)_A = (\eta_H)_B$. Следовательно, в соответствии с формулой (1.21) мы будем иметь для одного и того же потока следующее неравенство в смысле ускорений: $j'_A \ll j'_B$.

Таким образом, если иметь в виду водород, то менее плотный рассеивающий слой является менее эффективным в смысле приобретения большого ускорения от давления радиации. Однако, так как в оболочках, отделяющихся от Новых, водород (являющийся, как всегда, весьма изобильным) перемешан с другими атомами, то для менее плотных оболочек (α слой) он будет являться относительно более эффективным тормозящим фактором. А именно, благодаря обмену импульсами он будет тормозить движение атомов многих других элементов, для которых j' гораздо больше.

Перейдем теперь к другому вопросу. Описанные нами спектроскопические явления дают нам возможность подсчитать линейную толщину главной оболочки, отделившейся в момент максимума от N Her 1934. Идея, лежащая в основе этих подсчетов, чрезвычайно проста и заключается в следующем.

В соответствии с соображениями, изложенными в § 3, очевидно, что линейная толщина отделившейся оболочки определяется, во-первых, относительной скоростью слоев α и β , а, во-вторых, тем временем, которое необходимо для того, чтобы только что образовавшийся β слой дошел до внешней границы слоя α . Это время фиксируется, с

одной стороны, моментом t_β , т. е. моментом появления главного спектра (компонент II), а с другой стороны, моментом t_{pm} , т. е. моментом исчезновения предмаксимального спектра (компонент I), так как сам факт исчезновения компонента I свидетельствует о том, что слой β дошел до верхней границы слоя α и, тем самым, весь слой α перешел в β слой. Таким образом, если v_α есть скорость слоя α , v_β — скорость слоя β , то толщина оболочки определится по формуле

$$\Delta R = \int_{t_\beta}^{t_{pm}} (v_\beta - v_\alpha) dt. \quad (4.1)$$

Следует отметить, что величина ΔR , таким образом вычисляемая, дает представление о минимальной толщине отделившейся оболочки. Действительно, мы не должны забывать, что реальное сжатие отделившейся оболочки начинается еще до момента t_β ; во время этого начального сжатия движется материя, составляющая самые внутренние части отделившейся оболочки. Однако этой материи до момента t_β слишком мало для создания достаточно заметных линий поглощения. Но раз так, то отличие в толщине между реальной оболочкой (реальной в смысле полной массы) и оболочкой, представленной формулой (4.1), не должно быть существенным.

Для применения формулы (4.1) мы должны знать моменты t_β и t_{pm} . В момент $t=22.56$ XII компонент II был в соответствии с работой Меррилла [26] еще не виден и появился он лишь 23.56 XII. Таким образом, мы можем принять, что $t_\beta=23.0$ XII. Повидимому, более ранним этот момент взят быть не мог, так как звезда достигла своего максимума только в середине — конце суток 22 XII.

Время исчезновения первого компонента (предмаксимальный спектр) точно установить труднее, так как согласно различным авторам оно несколько различно. Однако здесь могут быть приведены следующие данные.

Что касается самих наблюдений Меррилла, то в данном случае имел место перерыв в наблюдениях с 26.55 XII по 29.09 XII. 29-го компонент I был уже не виден. Согласно указанию Вильсона [28] (O. Wilson) к моменту 26.5 XII компонент I (для металлов) почти исчез. Три спектра, полученных в Кэмбридже [29] 27 XII, также не дают никаких указаний на существование компонента I. Что же касается линий водорода, а также ионизированного титана, то линии этих двух элементов со смещениями, соответствующими компоненту I, повидимому, исчезли лишь к 28—29 XII (см. работу Мак-Лафлина 30)]. 30 XII компонент I не был зарегистрирован ни на одной обсерватории. Таким образом, мы можем считать, что окончательное исчезновение компонента I для металлов произошло 27 XII и для водорода 29 XII.

Момент появления компонента II как для водорода, так и для металлов, мы примем равным 23.0 XII. В качестве кривых, дающих

v_α и v_β , в функции времени мы используем кривые Меррилла, воспроизведенные на рис. 10. Для моментов, более поздних, чем 26.0 XII, величины v_α пришлось находить с помощью экстраполяции, причем экстраполяция велась с таким расчетом, чтобы получать максимальные величины для $v_{rel} = v_\beta - v_\alpha$.

Принятые величины для v_{rel} приведены в табл. 1. Эти данные основаны на измерениях, относящихся к Na I, Ba II, Si II, Fe II, O I. Однако в моменты, близкие к максимуму, водород и остальные металлы показали столь несущественные отклонения от данных, следующих из кривой рис. 10, что мы можем приведенную таблицу использовать с полным основанием и для водорода. На основании этой таблицы и формулы (4.1) были вычислены величины ΔR для металлов и для водорода. Они получились соответственно равными

$$\Delta R_{FeII} \approx 60 r_\odot; \quad \Delta R_H \approx 100 r_\odot.$$

Таким образом, эти величины дают нам полное представление о толщине отделившейся в момент максимума оболочки.

Следует отметить, что по сравнению с размерами обращающего слоя N Her 1934 перед максимумом приведенные величины для ΔR

ТАБЛИЦА I

t	v_{rel} (км/сек)	t	v_{rel} (км/сек)
23.0 XII	83	26.5 XII	155
23.5 XII	91	27.0 XII	160
24.0 XII	92	27.5 XII	165
24.5 XII	102	28.0 XII	175
25.0 XII	124	28.5 XII	178
25.5 XII	137	29.0 XII	186
26.0 XII	148		

являются относительно небольшими. Напомним, что согласно Бееру [15] размеры обращающего слоя ($r = R_0$) непосредственно перед максимумом достигали величин, колеблющихся в пределах от $318 r_\odot$ до $506 r_\odot$ для металлов и от $468 r_\odot$ до $681 r_\odot$ для водорода (неопределенность в величине R_0 была связана с неопределенностью в различных исходных величинах).

N Lac 1936. Данные о различных абсорбционных компонентах для этой звезды содержатся в исследовании Харпера [14]. Согласно этой работе спектроскопические явления вблизи максимума характеризовались тем, что в течение 24^h , следовавших за максимумом, скорость абсорбционной системы, существовавшей в спектре звезды до максимума, увеличилась более, чем на 300 км/сек. В то же время за 24^h , предшествовавших максимуму, соответствующее изменение составля-

ло всего 64 км/сек (также в сторону увеличения). В дальнейшем скорость, характеризовавшая главный спектр, продолжала также возрастать, однако, уже плавно, а не скачком. Явления отдельного существования предмаксимального спектра и главного спектра, согласно рассматриваемым данным, не наблюдались.

Однако, как мы уже указывали, Мак-Лафлину [1] удалось разделить оба указанных спектра.* Основная трудность в разделении этих спектров состояла в том, что линии в спектре N Lac 1936 около максимума были в некоторых частях спектра слишком диффузными.

Таким образом, и для этой звезды нормальный процесс $\alpha \rightarrow \beta$ трансформации имел место.

В спектре N Lac 1936 в момент максимума появился новый компонент I со смещением, меньшим, чем смещение главного и предмаксимального спектра.

Можно думать, что происхождение этого компонента аналогично происхождению *Abs* III или *Abs* III (H) в спектре N Pic 1925. Поэтому мы останавливаться на данном вопросе вновь не будем. Следует, однако, указать, что возможен и другой вариант. Он состоит в том, что происхождение компонента I может иметь взрывной характер. А именно, этот компонент может быть связан с некоторым достаточно плотным изолированным облаком, выброшенным в момент максимума из более внутренних частей Новой. Благодаря явлениям трения скорость этого облака могла замедлиться и стать меньшей, чем скорость, характеризующая предмаксимальный и главный спектры.

Далее, интересно отметить, что оба компонента, компонент I и главный спектр (компонент II), показывали после максимума в течение нескольких дней (около 10) непрерывное увеличение скорости. Повидимому, и после максимума давление радиации здесь играло весьма существенную роль.

В заключение настоящего параграфа необходимо сделать следующие замечания. Некоторые вопросы, рассмотренные в этом параграфе, могут показаться на первый взгляд не совсем убедительными. В частности, это может иметь место в отношении происхождения дополнительных, т. е. вторичных, компонентов (система *d* в спектре N Gem 1912, компонент I в спектре N Cyg 1920, системы III и III (H) в спектре N Pic 1925 и система I в спектре N Lac 1936). Однако автор ни в коем случае не считает, что предложенная им интерпретация во всех этих случаях является единственно мыслимой. Напротив, как неоднократно отмечалось, возможны самые разнообразные варианты. Автор хотел только показать, что происхождение всех указанных дополнительных компонентов можно связать с давлением радиации и что введение здесь других факторов не представляется необходимым.

* Более подробно см. [36].

Центральным вопросом данного параграфа являлся вопрос о трансформации предмаксимального спектра в главный. В связи с рассмотренным здесь материалом автор считает, что теория и наблюдения в данном отношении согласуются достаточно хорошо. Это говорит в пользу тех теоретических соображений, которые нами изложены в предыдущих параграфах. Кроме того, все это еще раз говорит в пользу того взгляда, что все явления, разыгрывающиеся в спектрах Новых вблизи максимума, связаны с давлением радиации. Действительно, мы не должны забывать, что размеры обращаемого слоя у Новых вблизи максимума яркости исключительно велики и доходят до $500-700 r_{\odot}$. На таких больших расстояниях от центра звезды и от ее фотосферы влияние каких-либо других сил, приводящих к замене предмаксимального спектра главным, представляется в высшей степени мало вероятным.

§ 5. О ПРОИСХОЖДЕНИИ ДИФFUЗНО-ИСКРОВОГО СПЕКТРА*

Во Введении мы уже указывали, что через некоторое время после появления „главного спектра“ в спектрах Новых появляется новая абсорбционная система, названная Мак-Лафлином „диффузно-искровым спектром“. Название этой системы связано, во-первых, с тем, что этот спектр на много более размыт, чем главный спектр и, во-вторых, с тем, что в нем выделяются линии ионизованных атомов („искровые“ линии бывшей ранее в употреблении терминологии).

Имея в виду дальнейшую дискуссию, мы приведем здесь некоторые выдержки из статьи Мак-Лафлина [1]:

„Эта система всегда содержит линии водорода, Ca II и Mg II, а кроме того, обычно присутствуют более сильные линии Fe II. Линии O I и Na I также часто наблюдаются в этой системе. В медленных Новых, в которых линии поглощения являются более резкими, видны Ti II, Cr II и другие ионизованные металлы“.

„Смещение этой системы, грубо говоря, в два раза больше, чем смещение линий главного спектра, но в различных Новых отношение скоростей колеблется от 1.5 до 2.5“.

„Водородные линии диффузно-искрового спектра — и иногда линии Fe II — сопровождаются эмиссией, которая симметрично расположена относительно нормального положения и которая простирается от фиолетового края данной линии диффузно-искрового спектра до положения одинаково смещенного в сторону красного конца спектра“.

* Здесь мы не делаем различия между диффузно-искровым и орионовым спектрами [1]. Поэтому, говоря в данном параграфе о диффузно-искровом спектре, мы подразумеваем обе эти системы, как системы, связанные только с непрерывным истечением материи из Новых. Разделение обеих систем и соответствующая физическая интерпретация содержится в другой работе автора [40], [41].

„В момент своей наибольшей интенсивности линии поглощения диффузно-искрового спектра на много интенсивнее, чем линии главного спектра“.

„В среднем диффузно-искровой спектр достигает своего полного развития, когда Новая ослабевает на 2^m по сравнению с ее яркостью в момент максимума. Затем он начинает ослабевать; Ca II, Na I и O I исчезают первыми, затем исчезает Fe II и наконец водород“.

„Обычно, перед своим исчезновением водородные линии расщепляются на два или большее число весьма хорошо различимых компонентов (эти компоненты были весьма резки в случае N Her 1934)“.

Когда диффузно-искровой спектр исчезает, то исчезает связанная с ним эмиссия, т. е. эмиссионные полосы сужаются и остаются только более узкие центральные эмиссионные полосы, связанные с главным спектром.

Диффузно-искровой спектр как совершенно особый спектр был выделен впервые Мак-Лафлином [2]. Вопросу о возможном происхождении этого спектра и посвящен настоящий параграф. А именно, в настоящем параграфе будут представлены различные соображения и аргументы в пользу того взгляда, что диффузно-искровой спектр не связан, как, например, главный спектр, с одной оболочкой, отделившейся от звезды. Напротив, будет показано, что, во-первых, диффузно-искровой спектр должен быть связан с непрерывным истечением атомов из Новой, возникающим сразу же после максимума, а, во-вторых, с непрерывным выбрасыванием относительно мелких изолированных облаков (газовых), начинающимся также сразу же после максимума.

Насколько известно автору, впервые такое предположение в отношении диффузно-искрового спектра N Her 1934 было высказано Виллиамсом* (E. G. Williams) в 1938 г. [31]. Рассматривая диффузно-искровой спектр этой звезды (система IV по Мак-Лафлину [30]), он обратил внимание на то, что в течение первых семи недель своего существования пределы действительно интенсивной части этой абсорбционной системы соответствовали, в смысле смещения, крутой, наружной части эмиссионного контура. В связи с этим он считал, что рассматриваемая система должна быть связана с атомами, которые непрерывно выбрасываются из фотосферы звезды. Эти атомы создают вокруг звезды весьма протяженную оболочку. Внутренняя часть этой оболочки, непосредственно окружающая звезду, создает эмиссионные полосы. Напротив, во внешних частях оболочки указанные атомы, достигнув своих предельных скоростей, начинают в основном только поглощать, что и создает диффузно-искровой спектр. Ядра абсорб-

* А также, независимо, Мак-Лафлином [42] в 1942 г., выдвинувшим ту же гипотезу и в отношении орionoва спектра. Однако никакой физической аргументации в пользу указанных представлений в работе Мак-Лафлина не содержится.

ционных систем III и IV в спектре N Her 1934 по Мак-Лафлину [30] Виллиамс рассматривает, как удаляющиеся от звезды конденсации „в некоторой атмосфере непрерывно восполняемой материей, выбрасываемой из фотосферы“. С другой стороны, в начале этого параграфа мы видели, что соответствие между эмиссией и поглощением

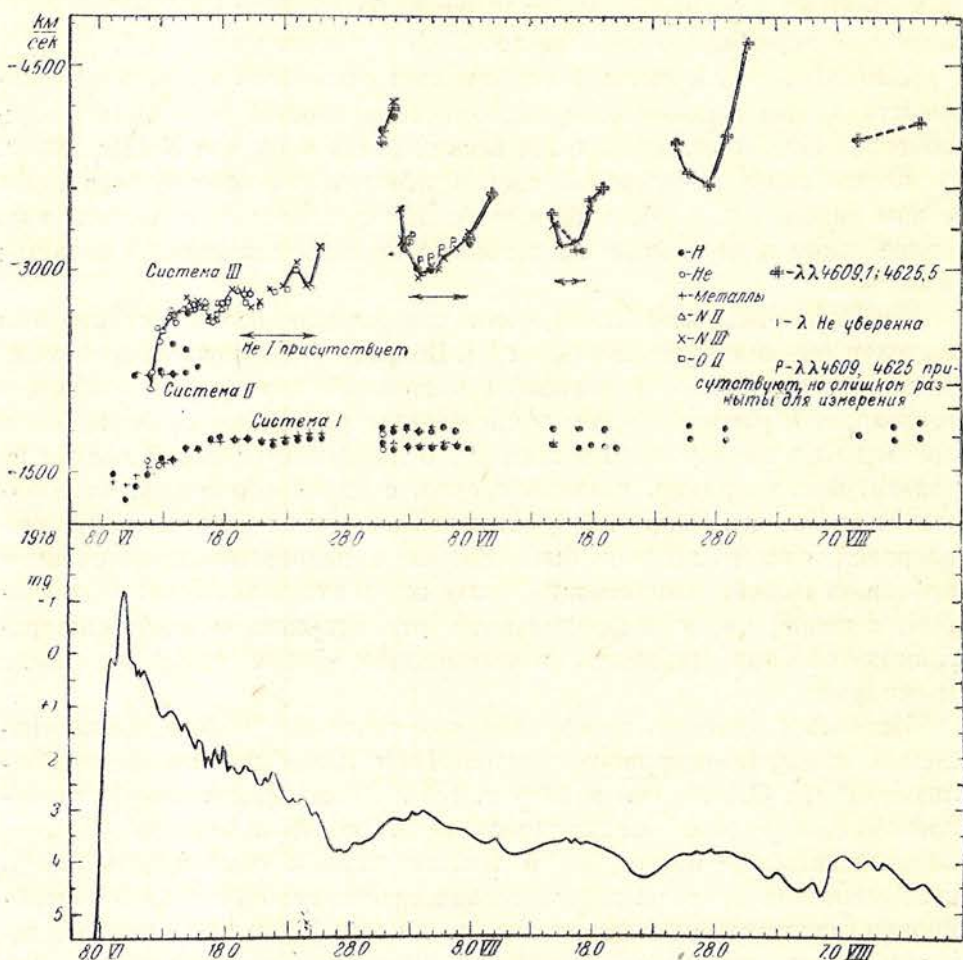


Рис. 11

для диффузно-искрового спектра имеет место не только для N Her 1934; скорее оно должно рассматриваться как типичный закон. Таким образом, если иметь в виду вышеизложенные представления Виллиамса, то во всех новых звездах диффузно-искровой спектр оказывается связанным с некоторым механизмом, который заставляет атомы непрерывно выбрасываться из фотосферы звезды.

В основном автор настоящей статьи согласен с вышеизложенными представлениями Виллиамса. Однако те аргументы, которые были представлены Виллиамсом, могут показаться не совсем убедительными,

ибо в данном случае приходится ссылаться на дополнительные гипотезы о происхождении эмиссионных полос. В то же время автор считает, что имеются гораздо более убедительные аргументы в пользу изложенного представления о происхождении диффузно-искрового спектра. Эти аргументы вытекают из анализа кривых лучевых скоростей, получаемых по линиям поглощения, образующим диффузно-искровой спектр. Для того чтобы понять это, обратимся к рис. 11, который является графиком кривых лучевых скоростей для N Aql 1918. Этот график взят нами из работы Уайза [11]. В качестве дополнения к рис. 11 мы присоединили кривую яркости согласно Кэмпбеллу [32]. Верхняя кривая графика соответствует диффузно-искровому спектру (система III по Уайзу).^{*} На основании этого графика мы можем составить себе представление о поведении диффузно-искрового спектра во время вторичных минимумов яркости. Как диффузно-искровой спектр, так и главный спектр исчезали во время вторичных минимумов. Однако возможно, что причина этого исчезновения была в обоих случаях отличной (см. далее).

Наиболее существенным для нас является наличие относительно больших ускорений, которые характеризовали диффузно-искровой спектр во время вторичных минимумов. Кроме того, из этих ускорений нам особо важны отрицательные ускорения (положительные ускорения могли бы быть объяснены возрастающим во время минимума общим давлением радиации вследствие возрастания температуры и, следовательно, возрастания роли лаймановского континуума). Особенно эффектными эти ускорения были за период от 1 VII до 4 VII.

Предположим на момент, что диффузно-искровой спектр N Aql 1918 создавался некоторой оболочкой, выброшенной Новой в момент максимума. Тогда наблюдавшиеся отрицательные ускорения могли бы интерпретироваться как гравитационные. Однако скорость, характеризовавшая рассматриваемый спектр, была столь велика, что наша гипотетическая оболочка должна была к 1 VII удалиться от звезды исключительно далеко. Но в таком случае, интерпретируя указанные отрицательные ускорения как гравитационные, мы должны приписать массе N Aql 1918 исключительно большое значение, не меньшее, чем $10^6 M_{\odot}$. Если же мы рассмотрим отрицательные ускорения, зарегистрированные для еще более поздних моментов, например, для 26 VII, то получим еще более высокие значения для M .

Все эти значения для M , без сомнения, являются абсурдными. Далее, мы могли бы предположить, что в данном случае наша оболочка проходила через некоторую сопротивляющуюся среду. Однако на таких больших расстояниях от звезды существование указанной

^{*} В действительности (см. первую сноску к настоящему параграфу) это орионов спектр данной звезды. Ее диффузно-искровой спектр представлен весьма недолго существовавшей системой II.

среды и притом достаточно плотной* по чисто физическим соображениям представляется весьма мало вероятным. Кроме того, остается совершенно непонятным, почему эта среда действовала только после вторичных минимумов.

Таким образом, повидимому, остается единственная возможность. а именно, приходится считать, что диффузно-искровой спектр обусловлен атомами, непрерывно выбрасываемыми из звезды, и что интенсивность такого выбрасывания и скорость вылетающих атомов меняются во время вторичных минимумов. Например, мы можем представить себе следующий механизм, объясняющий указанные явления в спектре N Aql 1918. Для этого мы обратим внимание на то обстоятельство, что скорость, характеризовавшая диффузно-искровой спектр, резко возрастала только во время вторичных минимумов и затем убывала, когда звезда выходила из минимума (об общем возрастании нормальной скорости см. далее).

Далее, напомним, что в случае N Her 1934 температура Новой во время вторичных минимумов заметно возрастала (см. например, [33]). Это соответствовало тому, что радиус звезды во время вторичных минимумов внезапно уменьшался и затем снова возрастал, когда звезда выходила из минимума. Вряд ли можно сомневаться в том, что то же самое имело место и для N Aql 1918. Но тогда изменение скорости, характеризующей диффузно-искровой спектр, можно объяснить следующим образом. Пусть с поверхности фотосферы звезды (по тем или иным причинам) происходит непрерывное истечение атомов с самыми различными скоростями. Однако те атомы, для которых скорость их движения на уровне фотосферы меньше некоторой критической, не смогут покидать звезду, а будут вскоре возвращаться назад. Напротив, те атомы, для которых начальная скорость их движения больше (или равна) критической, будут иметь возможность покидать звезду (мы говорим везде здесь критическая скорость, а не параболическая ввиду того, что на атомы все время действует давление радиации). Выйдя из сферы влияния звезды они будут приобретать некоторую предельную скорость. Из сказанного следует, что красный край абсорбционных линий, образующих диффузно-искровой спектр, будет определяться теми атомами, для которых скорость их вылета вблизи фотосферы оказалась критической.

Теперь предположим, что во время вторичного минимума фотосфера в соответствии с вышесказанным начинает сжиматься. Тогда, как это совершенно очевидно, критическая скорость вылетающих атомов должна будет непрерывно возрастать, делаясь тем больше, чем меньше становится r_p . Иначе говоря, образовывать диффузно-искровой спектр будут все более и более высокоскоростные атомы.

* Для того чтобы заметно изменять скорость движения нашей гипотетической оболочки в течение весьма небольших промежутков времени.

В то же время процентное содержание менее скоростных атомов, образующих этот спектр, будет все время уменьшаться. Правда, мы не должны забывать и тех атомов с относительно небольшой скоростью, которые образовывали диффузно-искровой спектр еще до того, как фотосфера начала сокращаться. Однако следует иметь в виду, что долгое время эти атомы не могут оставаться эффективными в смысле поглощения радиации. Благодаря непрерывному их удалению от звезды их поглощательная способность будет непрерывно убывать и вполне возможно, что это убывание будет идти весьма быстро (в отличие от плотной главной оболочки, где все атомы содержатся в относительно тонком слое). Таким образом при сокращении фотосферы диффузно-искровой спектр будет обнаруживать все большее и большее доплеровское смещение. Если звезда сожмется достаточно сильно, то вполне возможно, что критическая скорость станет такой большой, что выброс материи с поверхности фотосферы совершенно прекратится. Вполне возможно, что исчезновение линий диффузно-искрового спектра во время вторичных минимумов N Aql 1918 было связано именно с описанным процессом.

Интересно, далее, отметить, что нормальная (или средняя) скорость, характеризовавшая диффузно-искровой спектр, по мере общего ослабления звезды, непрерывно возрастала. В соответствии с изложенной интерпретацией это было связано с тем, что средний радиус звезды после максимума непрерывно убывал.

Рассмотрим теперь вопрос об исчезновении линий главного спектра. Здесь, повидимому, дело обстоит следующим образом. Вполне возможно, что оптическая толща главной оболочки в центральных частотах линий поглощения была для интересующего нас периода времени относительно небольшой. Далее, во время вторичных минимумов температура Новой могла весьма сильно возрасти. Это же приводило бы к резкому усилению ионизации и, тем самым, к еще большему уменьшению оптической толщи. Следовательно, линии поглощения, образующие главный спектр, могли становиться незаметными. Вполне возможно, что данный фактор играл некоторую роль и для диффузно-искрового спектра.

В заключение следует отметить, что после того, как звезда начнет выходить из вторичного минимума, все описанные явления должны идти в обратном порядке.

Предлагая вниманию читателя вышеуказанную интерпретацию изменений в диффузно-искровом спектре N Aql 1918, мы исходили из того основного наблюдательного факта, что увеличение скорости, характеризовавшей этот спектр, начиналось тогда, когда звезда начинала уменьшать свою яркость. Однако этот факт не ограничивается только данной звездой. Оказывается, что эта последовательность явлений встречается довольно часто. Правда, она не является универсальным законом, но весьма часто изменение скорости, харак-

теризующей диффузно-искровой спектр, происходит именно так, как мы указали. Во всех этих случаях гравитационная интерпретация наблюдаемых отрицательных ускорений, т. е. интерпретация, включающая только одну оболочку, оказывается весьма искусственной. Напротив, представляется наиболее вероятным, что во всех случаях диффузно-искровой спектр образован непрерывным истечением атомов; изменение скорости, характеризующей этот спектр, следует связывать тогда с изменениями в критической скорости выбрасываемых атомов. Поэтому вполне естественно считать, что указанная выше интерпретация явлений в диффузно-искровом спектре N Aql 1918 применима и к остальным аналогичным случаям.

Для большей убедительности мы рассмотрим другие материалы по данному вопросу.

N Gem 1912. Скорость, характеризовавшая диффузно-искровой спектр у этой звезды с момента его появления, была подвержена флуктуациям, которые в общем соответствовали вышеуказанным закономерностям. В данном отношении мы можем обратиться к кривой Райта [22].

Его абсорбционная система III (*b* по Стрэттону [23]) является диффузно-искровым спектром. Сравнение кривой яркости с кривой лучевых скоростей для диффузно-искрового спектра позволяет сделать следующие выводы.

В момент появления диффузно-искрового спектра звезда находилась во вторичном минимуме, наступившем сразу же после максимума. По мере увеличения яркости от 21 III до 24 III (момент вторичного максимума) скорость, характеризующая диффузно-искровой спектр (v_{DE}), убывала и достигла минимума также около 24 III. После 24 III яркость звезды стала быстро убывать вплоть до 27 III. В соответствии с этим начала возрастать и v_{DE} . После 27 III до 30 III звезда вновь слабо возрастала в яркости. В соответствии с этим v_{DE} для некоторых линий (например, орионовы линии) вновь убывала.

В дальнейшем флуктуации яркости стали незаметными и аналогичное сопоставление выполнить трудно.

N Pic 1925. Соответствующие данные о диффузно-искровом спектре для N Pic 1925 могут быть найдены в табл. 49 работы Спенсер-Джонса [25]. Вопрос о начальном моменте возникновения диффузно-искрового спектра здесь несколько неопределенен. Почти сразу же после максимума, 10 VI, в спектре звезды появился высокоскоростной компонент со средним смещением 1100 км/сек, который в последний раз был зарегистрирован 27 VI. Скорость, характеризовавшая этот компонент, почти в четыре раза превосходила скорость, характеризовавшую главный спектр (≈ 320 км/сек). Это и дает повод к сомнениям, является ли данный компонент диффузно-искровым спектром. Однако, если мы будем считать, что это так, то поведение данного компонента до некоторой степени напоминает ожидаемое поведение диффузно-искрового спектра. Так, от 10 VI к 12—13 VI величина v_{DE}

увеличивалась, и это было связано с уменьшением яркости звезды после главного максимума. С 13 VI до приблизительно 19—20 VI величина v_{DE} уменьшалась. В течение этого периода в падении яркости звезды наблюдалась некоторая задержка.

Затем с 20 VI и до 25—26 VI v_{DE} снова возрастала. Это было связано с дальнейшим падением яркости у звезды. Интересно отметить, что между 21 VI и 24 VI в возрастании v_{DE} наблюдалась некоторая остановка; в то же время яркость звезды 22—23 VI имела небольшой, но выраженный максимум. Интерпретация описанных явлений с помощью давления радиации и гравитации была бы и здесь весьма затруднительной. Новый высокоскоростной компонент в спектре N Psc 1925 появился 3 VII—компонент IV а. Этот компонент был уже вне всякого сомнения диффузно-искровым спектром. Средняя скорость, его характеризовавшая, равнялась 625 км/сек и слегка убывала с возрастанием яркости звезды ко вторичному максимуму. Последний раз этот компонент был виден 18 VII перед вторичным максимумом. Затем появились два новых компонента, которые Спенсер-Джонс рассматривает как multiple Absorption VI. Повидимому, появление их было связано с большим вторичным максимумом (вблизи 27 VII). Скорость, характеризующая оба эти компонента, возрастала до 5—7 VIII. Почти все это время яркость звезды слегка убывала (до 4—5 VIII). Таким образом, и здесь наш общий закон выполнялся.

Наиболее характерным для N Psc 1925 было то, что исчезновение некоторых компонентов, характеризовавших диффузно-искровой спектр, было, без всякого сомнения, связано с вторичными минимумами и максимумами (*Abs IV a*, некоторые компоненты из multiple *Abs VI*). Если бы мы здесь имели дело с изолированными облаками, то такую связь понять было бы чрезвычайно трудно. Напротив, это легко понять, если иметь в виду изменяющуюся критическую скорость.

N Her 1934. Для этой звезды наиболее полные данные по интересующему нас вопросу содержатся в работе Мак-Лафлина [30], рис. 10 и 11 этой работы. Диффузно-искровой спектр представлен на этих рисунках абсорбционной системой IV. В момент своего появления эта система была весьма слабой, но затем усилилась и впоследствии стала наиболее интенсивной и широкой абсорбционной системой в спектре звезды. В момент своего наибольшего развития диффузно-искровой спектр был на много более интенсивен, чем главный спектр. Особенно показательной была ширина линий поглощения, его составлявших. Уже это одно обстоятельство говорит в пользу того взгляда, что мы имели дело с выбрасыванием материи, имеющим большую дисперсию в скоростях. О том, почему интенсивность линий диффузно-искрового спектра была большей, чем интенсивность линий главного спектра, см. разъяснение Мак-Лафлина [1], стр. 115.

Однако эволюция диффузно-искрового спектра была весьма сложной; соответствие между скоростью, его характеризующей, и яркостью

звезды установить здесь гораздо труднее, чем в случае предыдущих трех звезд. Однако ряд замечаний в данном отношении все же необходимо привести.

Так например, момент наибольшего смещения, которого достиг диффузно-искровой спектр после максимума, совпадает с моментом довольно глубокого вторичного минимума, начавшегося 29—30 I. Тем не менее следует отметить, что возрастание скорости, характеризовавшей *Abs* IV, началось еще задолго до наступления указанного вторичного минимума. Наиболее резким это возрастание как для данного компонента, так и для *Abs* III было вблизи 19—20 I, когда был зарегистрирован самый яркий вторичный максимум (приблизительно $2^m.0$ см. кривую Крумпхольца [27]). Возможно, что в этот момент из звезды было выброшено несколько газовых облаков с большими скоростями. Эти облака, изменив положение эффективных поглощающих центров линий поглощения, тем самым изменили скорость, характеризовавшую указанные компоненты. Однако вполне возможно также и то, что в данном случае наше общее правило было нарушено, и те процессы, которые заставили v_{DE} преждевременно увеличиваться, не были связаны с яркостью звезды и с уменьшением ее фотосферического радиуса.

Следует вместе с тем отметить, что влиянием возросшего давления радиации объяснить указанные явления вряд ли можно, ибо в данном случае ускорения, характеризовавшие обе системы, увеличились внезапно в несколько раз. В то же время яркость звезды [см. формулу (1.21)] изменилась к вторичному максимуму (19 I) очень мало, всего на $0^m.5$, т. е. приблизительно в 1.6 раза. Температура же звезды, оцениваемая по ее спектру, оставалась вблизи данного максимума практически постоянной (см., например, атлас спектров N Her 1934, Стрэттона). Следовательно, и роль *L*-континуума не могла здесь сколько-нибудь увеличиться.

Повидимому, давление радиации играло большую роль для других компонентов; так, например, для компоненты V, которая характеризовалась большим ускорением с момента своего появления. Это ускорение исчезло только тогда, когда звезда оказалась в вышеуказанном вторичном минимуме (29—30 I), т. е. тогда, когда давление радиации согласно (1.21) резко уменьшилось.

Дальнейшие изменения v_{DE} еще более сложны. Небольшое уменьшение v_{DE} с 4 II до 7 II связано, повидимому, с увеличением яркости звезды после большого вторичного минимума, начавшегося 29—30 I. Приблизительно между 15 II и 18 II с диффузно-искровым спектром произошли заметные изменения, которые могут быть интерпретированы двояким образом. а) Величина v_{DE} за указанный период могла заметно уменьшиться (приблизительно на 100 км/сек для водорода и заметно больше для других элементов, в частности, для натрия, см. рис. 10 и 11 работы Мак-Лафлина [30]), но мы имели тот же

спектр. Этот диффузно-искровой спектр с уменьшенной скоростью обозначен Мак-Лафлином после указанного периода как IV а. б) Старый диффузно-искровой спектр исчез и появился новый с меньшим смещением. Этот вариант подтверждается до некоторой степени тем обстоятельством, что согласно рис. 11 Мак-Лафлина старый диффузно-искровой спектр по линиям натрия существовал еще некоторое время после того, как появился новый.

Объяснить рассматриваемые явления в обоих случаях весьма трудно. Возможно, что они связаны или с кратковременной вспышкой яркости звезды 18 II, хорошо видимой на кривой Крумпхольца [27]. Однако для нас все это сейчас не так важно. Для нас важно то обстоятельство, что в данном случае было зарегистрировано большое отрицательное ускорение.

Считая, что компонент IV связан с изолированной оболочкой, выброшенной Новой вблизи максимума (в момент появления диффузно-искрового спектра), и интерпретируя указанное ускорение как гравитационное, мы приходим к абсурдно большим массам для N Per 1934.

Принимая во внимание все сказанное, мы видим, что и для этой звезды диффузно-искровой спектр должен быть связан с непрерывным истечением материи и с выбрасыванием отдельных относительно небольших газовых облаков.

Что касается N Cyg 1920 и N Lac 1936, то падение их яркости после максимума происходило достаточно плавно.

Вместе с тем в смещении их диффузно-искрового спектра также не обнаруживалось никаких резких колебаний. Это обстоятельство равным образом подтверждает все наши соображения. Можно только указать, что для N Lac 1936 величина $v_{де}$ после максимума непрерывно увеличивалась. С точки зрения вышеизложенных соображений это было связано с тем, что радиус звезды после максимума быстро убывал (в связи с быстрым убыванием яркости). Для N Per 1901 автор никакими спектроскопическими данными в отношении рассматриваемого вопроса не располагал. Заметим, что в кривой яркости N Per 1901 наблюдались заметные полупериодические флуктуации.

Резюмируя все изложенное по вопросу о происхождении диффузно-искрового спектра, мы можем сделать следующие замечания.

Как вышеизложенные соображения Виллиамса, так и аргументы, представленные в настоящем параграфе, говорят в пользу того, что диффузно-искровой спектр образуется в результате непрерывного истечения материи из новых звезд после максимума. Эта материя может покидать звезду или в форме отдельных непрерывно выбрасываемых атомов, или в форме не особенно больших облаков. Повидимому, последние имеют тенденцию выбрасываться вблизи вторичных максимумов, так же как это наблюдается вблизи главного максимума. О том, что диффузно-искровой спектр образуется не только из инди-

видуальных атомов, но весьма часто и из изолированных облаков, говорит следующее обстоятельство. В начале настоящего параграфа мы видели, что обычно перед своим исчезновением водородные линии расщепляются на два или на большее число весьма хорошо различимых компонентов. Это с несомненностью означает, что после того, как менее плотная материя, образующая диффузно-искровой спектр (образующая внутри линий этого спектра своеобразный континуум), перестает быть активной в смысле поглощения радиации, отдельные абсорбционные максимумы, соответствующие более плотным облакам, начинают выделяться более резко.

Что касается вопроса о том, почему исчезает диффузно-искровой спектр, то с точки зрения вышеизложенных соображений это связано с тем, что, убывая в яркости, Новая одновременно уменьшает свой радиус. Поэтому, в конце концов, выбрасываемые из фотосферы атомы не могут преодолевать тяготение звезды. В то же время та материя, которая была выброшена уже ранее, перестает быть активной в смысле поглощения радиации (вследствие своего большого удаления от звезды). Однако полностью выбрасывание материи в данном случае не прекращается. Уменьшается лишь количество выбрасываемой материи, так что даже для сильных линий начинает удовлетворяться неравенство $\tau_v \ll 1$. Та материя, которая и в дальнейшем продолжает выбрасываться из звезды, образует в конце концов спектр звезд типа Вольф-Райе (конечная стадия Новых).

Теперь мы рассмотрим вопрос о том, почему в диффузно-искровом спектре особо выделяются линии ионизированных металлов. Повидимому, это связано с двумя факторами. а) Во-первых, мы должны иметь в виду, что те атомы, которые покидают звезду и затем образуют диффузно-искровой спектр, движутся вначале, т. е. вблизи звезды, с весьма большой скоростью, во всяком случае не меньшей 600—700 км/сек, а весьма часто и с большей. В то же время внутренние части протяженной оболочки, окружающей Новую после максимума, образованы не только такими атомами, но также и теми атомами, которые движутся с гораздо меньшими скоростями. Часть этих атомов, как мы указывали выше, даже падает назад на звезду и, следовательно, движется по направлению к ее центру. Поэтому между этими атомами и атомами, впоследствии образующими диффузно-искровой спектр, весьма часто возникают столкновения, которые могут вести к ионизации легко ионизируемых металлов.

б) Плотность той материи, которая образуется непрерывно вылетающими из звезды атомами (и особенно на достаточно больших расстояниях от нее), должна быть весьма небольшой и, конечно, на несколько порядков ниже, чем плотность материи, составляющей главную оболочку (плотную после $\alpha \rightarrow \beta$ процесса). Это обстоятельство также должно вести к заметному усилению ионизации, что будет особенно эффективно для металлов.

В заключение настоящего параграфа мы обсудим вопрос о возможном механизме, ведущем к выбрасыванию атомов и к образованию диффузно-искрового спектра. Автор считает, что главный фактор, фиксирующий это выбрасывание, не связан только с давлением радиации.

Напротив, можно думать, что основную роль здесь играют процессы, носящие характер непрерывно длящегося взрыва. Эти процессы могут иметь место или непосредственно под фотосферой или еще глубже. В том, что такие процессы, имеющие „вулканический“ характер, действительно протекают после максимума в новых звездах, говорят те соображения, которые содержатся в работе Женара [34] (J. Genard).

Наиболее правдоподобен такой вариант. А именно, вполне возможно, что благодаря указанным взрывным процессам выбрасываемые атомы достигают достаточно удаленных от звезды областей, где уже основную роль начинает играть давление радиации. Под действием последнего атомы получают возможность покинуть звезду навсегда. В данном случае взрывные процессы играют ту роль, что они сообщают атомам большие начальные скорости, в результате чего атомы получают возможность достичь сферы эффективного влияния давления радиации. Однако большая конкретизация данного вопроса и особенно с физической точки зрения является в настоящее время весьма затруднительной. Здесь, конечно, необходимы дальнейшие весьма тщательные исследования наблюдательного и теоретического характера.

§ 6. ОБ ОБРАЗОВАНИИ ВТОРИЧНЫХ АБСОРБЦИОННЫХ СИСТЕМ

В предыдущих параграфах мы рассмотрели вопрос о происхождении главной и диффузно-исковой систем. Однако, как мы указывали во Введении, в спектрах новых звезд весьма часто наблюдаются вторичные абсорбционные системы, которые не могут быть причислены ни к главной системе, ни к диффузно-исковой. Эти системы появляются как непосредственно после максимума, так и через некоторый промежуток времени после этого момента, иногда весьма большой. Однако те вторичные системы, появление которых не связано с главным максимумом, нас интересовать здесь не будут. Их происхождение имеет, повидимому, взрывной характер. Напротив, вторичные системы, появляющиеся сразу же после максимума, представляют большой интерес. Часто ускорения, характеризующие эти системы, относительно не велики и по порядку таковы же, как ускорения, характеризующие главную систему. Это говорит о том, что происхождение вторичных компонентов (появляющихся сразу же после максимума) и главного спектра является до некоторой степени общим. Действительно, мы покажем в настоящем параграфе, что появление вторичных компонен-

тов, так же как и появление главного спектра, должно быть связано с общим фактором, а именно с внезапно возрастающим селективным давлением радиации.

Смещение, характеризующее вторичные системы, может быть как меньше, так и больше, чем смещение, характеризующее главную систему. Однако те случаи, когда смещение вторичных систем меньше, чем смещение главного спектра, мы уже рассмотрели в § 4 (см. например, систему d N Gem 1912 после максимума, *Abs* III для N Pic 1925 и т. д.). Некоторые из этих систем мы рассматривали в качестве остатка предмаксимального спектра. В настоящем же параграфе мы будем рассматривать исключительно те системы, смещение которых больше, чем смещение главной системы. К таким системам могут быть, например, отнесены следующие.

Повидимому, несколько (или, по крайней мере, одна-две) вторичных систем должны существовать среди высокоскоростных систем N Cyg 1920 (рис. 7 этой статьи). Об этом говорит многочисленность последних. Заметим, что и здесь ускорения, характеризовавшие эти системы, были не велики (за исключением системы IX).

В спектре N Her 1934 вторичной системой была система *Abs* III по Мак-Лафлину [30]. В течение некоторого промежутка времени после максимума ее средняя скорость оставалась практически постоянной. Ко вторичной системе может быть отнесена система, связанная с линией 5876 Å в спектре N Her 1934.

Более детальное изучение вторичных абсорбционных систем показывает, что они являются гораздо менее устойчивыми, чем главная система, и в некоторых случаях исчезают весьма быстро. Повидимому, в некоторых случаях это связано с тем, что массы оболочек, образующих вторичные системы, гораздо меньше, чем масса главной оболочки.

Теперь мы перейдем к вопросу о происхождении вторичных систем. Основная наша задача будет состоять в том, чтобы показать, что происхождение вторичных систем связано с неоднородностью протяженного обращющего слоя, окружающего Новую перед максимумом.

В том, что протяженный слой каждой Новой перед максимумом является неоднородным, вряд ли приходится сомневаться. В первую очередь, здесь следует иметь в виду, что расширение новых звезд перед максимумом имеет характер длящегося некоторое время взрыва. Поэтому, так же как и во время всякого взрыва, о вполне равномерном распределении материи, выбрасываемой звездой, не может быть и речи. А именно, можно думать, что вся оболочка вздувшейся к моменту максимума Новой состоит из отдельных сгущений самых различных размеров, пространство между которыми заполнено относительно менее плотной материей.

О неоднородности в структуре расширяющейся новой звезды перед максимумом говорят следующие наблюдательные факты.

1) Так называемое раздвоение новых звезд. В настоящее время считается, что такое раздвоение не есть реальное раздвоение, а является лишь результатом выброса Новой в различных направлениях отдельных более плотных сгущений. Количество материи, содержащейся в этих сгущениях, оказывается достаточно большим, для того чтобы создавать видимость раздвоения. К этому же можно добавить раздвоение в некоторых случаях запрещенных линий в эпоху, близко следующую за максимумом. Такое раздвоение связывается обычно с наличием рассмотренных сгущений.

2) Непосредственные фотографии оболочек, выброшенных Новыми. В этом отношении весьма показательны снимки туманной оболочки, окружающей N Per 1901, воспроизведенные в Handbuch d. Ar., т. 6, стр. 292 и т. 7, стр. 683. Эти снимки непосредственно показывают, что в данном случае не имеется даже намеков на однородность материи, составляющей выброшенную оболочку. Напротив, мы наблюдаем отдельные излучающие клочки материи, выброшенные Новой почти без всяких признаков сферической симметрии (расстояния всех этих клочков до самой звезды, по видимому, не сильно отличаются друг от друга).

Даже в случае N Aql 1918, где окружавшая ее туманность имела форму диска, более детальное исследование, произведенное с помощью спектрографов [35], показало, что внутри этой туманной оболочки также имеются весьма заметные отклонения от сферической симметрии (в смысле количества выброшенной материи).

На основании сказанного мы будем рассматривать отсутствие однородности в расширяющейся до максимума оболочке, окружающей Новую, как факт, основанный целиком на наблюдениях. В связи с этим мы теперь попытаемся показать, что возникновение вторичных облаков связано с тем, что в начальный момент $t=t_v$ (см. § 2) некоторые части протяженного обращаемого слоя Новой обладают плотностью, заметно отличающейся от средней плотности материи в обращаемом слое (здесь, как всегда сравниваются плотности, относящиеся, конечно, к одному и тому же уровню r).

Переходя к вопросу о непосредственном механизме возникновения вторичных облаков, мы постараемся использовать те соображения о происхождении главного спектра, которые были нами рассмотрены в § 2 и 3 настоящей статьи. Это оказывается весьма резонным, если мы вспомним, что с точки зрения наблюдений между появлением главной системы и появлением вторичных систем имеется много общего.

Рассмотрим теперь возможные модели, объясняющие происхождение вторичных систем.

а) Обратимся к рис. 12. Как обычно SA есть направление: наблюдатель — центр звезды. Пусть объем $aaaa$, движущийся как составная часть обращаемого слоя в направлении D_1D_2 , характеризуется тем, что его плотность $\rho'(r)$ на каждом уровне r заметно отличается от

средней плотности обращающего слоя $\rho(r)$ на том же уровне r . Кроме того, пусть скорость движения объема $aaaa$ в момент $t = \bar{t}_g$ приблизительно такова же, как средняя скорость v_s обращающего слоя в этот момент ($v_s \approx v_p$). Начиная с момента $t = t_g$, внутри обращающего слоя ниже уровня $r = r'$ (см. § 2) начнет образовываться градиент скоростей. В момент максимума на нижнюю границу отделившейся оболочки ($r = r'$) упадет поток πG_v . Для нашего облака этой нижней границей будет уровень bb . (Следует отметить, что благодаря различию в плотностях ρ и ρ' , т. е. благодаря различию в физических условиях, уровень bb может, вообще говоря, не совпадать с общим уровнем r' .)

В результате замены πF_v на πG_v как внутри главной оболочки, так и внутри облака $aaaa$ начнется $\alpha \rightarrow \beta$ процесс. Таким образом, в обоих случаях будет образована β оболочка. Однако начальная плотность материи в главной оболочке (α слое) и начальная плотность материи в облаке $aaaa$ (α' слое) согласно основному нашему условию была весьма различной. В то же время различие в величине ρ вызывает различие в степени ионизации. Поэтому атомы, составляющие α слой и α' слой, будут ускоряться потоком πG_v в различной степени. Таким образом, вскоре после максимума, скорость β слоя для главной оболочки будет отличаться, и вполне возможно, что заметно, от скорости β' слоя для облака $aaaa$. Это и может привести к образованию вторичной оболочки, движущейся со скоростью, отличающейся от скорости главной оболочки.

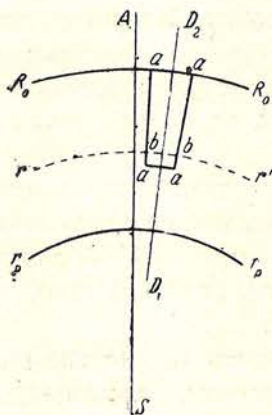


Рис. 12

Однако сделать сразу же какие-либо совершенно определенные заключения о зависимости v_β от ρ весьма трудно. Иначе говоря, если, например, $\rho'(r) < \rho(r)$, то неизвестно, какое из неравенств мы будем иметь в конце $\alpha \rightarrow \beta$ процессов, $v_\beta > v_{\beta'}$ или $v_\beta < v_{\beta'}$. Ответ на этот вопрос можно получить лишь в результате весьма тщательных дополнительных исследований.

Для того чтобы понять главные из указанных трудностей, мы рассмотрим здесь два вопроса, связанные с зависимостью v_β от плотности.

1) Давление радиации на атомы какого-либо элемента помимо других факторов в исключительно сильной степени зависит от степени ионизации этого элемента. Представим себе, что α слой состоит из атомов какого-либо одного элемента. Пусть степень ионизации этого элемента есть x . Далее, пусть в 1 см^3 содержится N атомов данного элемента; из них пусть N_0 будут нейтральными, N_1 — ионизированными. Тогда, сила, действующая на 1 см^3 и обусловленная селективным давлением радиации, будет, если мы вначале примем во внимание

только нейтральные атомы, равна

$$(p')_0 = N_0 A_0 = N(1-x) A_0, \quad (6.1)$$

где A_0 — некоторый коэффициент. Если σ_v^0 — коэффициент поглощения внутри линии поглощения, то в коэффициент A_0 входит множителем следующий интеграл:

$$\int_0^\infty F_v \sigma_v^0 dv, \quad (6.2)$$

в котором интегриация идет по всему спектру. Предполагается, что в рассматриваемом интеграле приняты во внимание все линии поглощения, связанные с данным нейтральным элементом.

Если величина σ_v^0 для всех рассматриваемых линий обусловлена только доплеровским эффектом и процессами естественного затухания, то она не зависит от x . Эти случаи мы сейчас и рассмотрим. (В случае эффекта Штарка величина σ_v^0 зависит от парциального электронного давления p_e и, тем самым, зависит от x .)

Величину $(p'_\sigma)_0$ мы можем переписать следующим образом:

$$(p'_\sigma)_0 = \frac{\rho}{m} (1-x) A_0, \quad (6.3)$$

где ρ — плотность материи, а m — масса одного атома.

Теперь мы заметим следующее обстоятельство. В интересующих нас сейчас случаях мы имеем дело с весьма протяженными в линейном отношении объектами. Нет никакого сомнения в том, что линейные размеры вторичных облаков в момент максимума в среднем не меньше, чем 5—10 $r_\odot$, ибо, например, линейная толщина главной оболочки N Her 1934 оказалась равной (см. § 4) 60—100 $r_\odot$. Поэтому отношение длины свободного пробега λ к указанным линейным размерам есть величина, с несомненностью, весьма малая (см. § 3). Следовательно, если нейтральный атом ускоряется под действием давления радиации, то вскоре он столкнется с другими выше расположенными атомами, с которыми и обменяется частично своей кинетической энергией. В то же время те атомы, с которыми он столкнется, могут быть как ионизированными, так и нейтральными. Поэтому в конце концов сила $(p'_\sigma)_0$ расходуется на сообщение ускорения как нейтральным, так и ионизированным атомам. Кроме того, мы должны иметь в виду, что понятие нейтральный или ионизированный атом есть понятие чисто статистическое. А именно, какой-либо данный атом в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса может сделаться бесчисленное число раз нейтральным и ионизированным. На основании этих соображений вычислим теперь то ускорение, которое сообщается силой $(p'_\sigma)_0$ одному см³ материи. Это ускорение мы получим, если поделим (6.3) на полную, и именно полную плотность материи ρ :

$$(j'_\sigma)_0 = \frac{(p'_\sigma)_0}{\rho} = \frac{1-x}{m} A_0. \quad (6.4)$$

Для ионизированных атомов данного элемента мы можем написать аналогично (6.4) следующее выражение:

$$(j'_s)_1 = \frac{(p'_s)_1}{\rho} = \frac{x}{m} A_1, \quad (6.5)$$

где в величину A_1 входит интеграл, аналогичный (6.2), но относящийся ко всем линиям поглощения, связанным с ионизированными атомами (коэффициент поглощений σ_1^1).

Следовательно, полное ускорение, приобретаемое 1 см³ материи, будет равно

$$j'_s = \frac{1}{m} \{A_0(1-x) + A_1x\}. \quad (6.6)$$

Выясним теперь влияние плотности на величину j'_s . Если бы мы имели $A_0 = A_1$, то величина j'_s была бы величиной постоянной. Поэтому здесь основную роль играет вопрос о том, что больше, A_0 или A_1 .

Допустим, например, что A_0 больше, чем A_1 . Тогда величина j'_s будет тем больше, чем меньше будет x . С другой стороны, в общем случае степень ионизации x тем меньше, чем больше плотность ρ .

Таким образом в данном случае величина j'_s тем больше, чем больше плотность ρ . В частности, этот случай имеет место для водорода, для которого $A_1 = 0$. Напротив, если A_1 больше, чем A_0 , то величина j'_s тем больше, чем меньше ρ . Однако, как мы указывали, окончательный ответ на интересующий нас вопрос о влиянии ρ на j'_s и, следовательно, на v_β , дать весьма трудно. Действительно, в реальном α слое присутствуют самые разнообразные элементы, перемешанные друг с другом. Далее, для различных элементов отношение величин A_1 к A_0 весьма различно. Кроме того, в количественном отношении все элементы представлены в высшей степени неодинаково. В то же время благодаря взаимным столкновениям быстро ускоряемые атомы (давлением радиации) передают приобретаемые ими импульсы менее ускоряемым атомам и, тем самым, увлекают их за собой. (Взаимным трением, повидимому, и объясняется то обстоятельство, что обычно атомы различных элементов в оболочках Новых движутся вблизи максимума приблизительно с одинаковой скоростью; это доказывается приблизительно равным смещением линий поглощения у различных элементов.) Таким образом, для того, чтобы вывести зависимость между j'_s и ρ , мы должны рассматривать совершенно конкретную модель, зная заранее химический состав оболочек. Конечно, все это в настоящее время представляется весьма затруднительным.

2) Рассмотрим начальный период $\alpha \rightarrow \beta$ процесса. Мы сейчас увидим, что для этого периода весьма большую роль играет вопрос о длине свободного пробега. В то же время длина свободного пробега λ зависит от полной плотности материи в данном месте.

Рассмотрим только что отделившуюся оболочку в двух каких-либо направлениях ϑ_A и ϑ_B . Сразу же после отделения оболочки на нижнюю границу ее в обоих указанных направлениях ϑ_A и ϑ_B начнет действовать поток πG_v . Пусть средняя плотность оболочки в направлении ϑ_A есть $\rho_A(r)$, в направлении ϑ_B есть $\rho_B(r)$. Пусть далее $\rho_A(r) \ll \rho_B(r)$. Для того чтобы изучить ту роль, которую в данном вопросе играет длина свободного пути, мы сейчас другие эффекты, связанные с различием в ρ , рассматривать не будем. Поэтому нашу модель мы упростим и будем считать, что поглощательная способность атомов у материи, расположенной в направлениях ϑ_A и ϑ_B , одинакова. Иначе говоря, мы будем считать, что вначале и все время в течение $\alpha \rightarrow \beta$ процесса соблюдается равенство $(x)_{\vartheta_A} = (x)_{\vartheta_B}$.^{*} Это означает, что при одном и том же значении πG_v приращение скорости у атомов в обоих случаях будет вначале итти одинаково, т. е. будут равны ускорения $(j'_\sigma)_{\vartheta_A}$ и $(j'_\sigma)_{\vartheta_B}$ в начальный момент.

Кроме того, мы будем считать, что в момент отделения оболочки начальная скорость всех атомов в направлениях ϑ_A и ϑ_B одинакова. Однако весьма скоро положение изменится. Действительно, рассмотрим состояние нашей оболочки через некоторый не особенно большой промежуток времени Δt . Благодаря небольшому значению $(\rho)_{\vartheta_A}$ и, следовательно, большому значению $(\lambda)_{\vartheta_A}$ атомы в направлении ϑ_A будут в течение времени Δt непрерывно ускоряться. (Мы, конечно, имеем в виду атомы, расположенные ниже уровня, для которого в обоих направлениях $\tau_{v_0}^\sigma$ для наиболее существенных абсорбционных линий удовлетворяет неравенству $\tau_{v_0}^\sigma \leq 1$; в более удаленные области поток πG_v доходит в весьма ослабленном виде, а в случае сильных линий поглощения вообще не доходит.)

Напротив, атомы, движущиеся в направлении ϑ_B , весьма скоро начнут благодаря столкновениям передавать приобретаемый ими от радиации дополнительный импульс более высоко расположенным атомам. Тем самым, указанные атомы будут увеличивать свою скорость медленнее, чем атомы, движущиеся в направлении ϑ_A . Таким образом, если иметь в виду только влияние величины λ , то меньшие плотности способствуют приобретению больших скоростей. Однако следует иметь в виду, сделанное нами вначале предположение о равенстве величин $(x)_{\vartheta_A}$ и $(x)_{\vartheta_B}$. Вполне возможно, что введение зависимости x и σ_v от ρ может изменить окончательный результат. Поэтому и здесь необходимо весьма тщательное исследование.

В настоящем пункте а) мы рассмотрим модель, для которой образование вторичных оболочек связано с неоднородностью отделяющейся оболочки в каком-либо направлении. Так, например, на рис. 12 этой статьи неоднородность оболочки связывалась с направлением $D_1 D_2$.

^{*} См. формулу (6.6).

Однако следует указать, что для данной модели угол между направлениями SA и D_1D_2 не должен быть особенно большим. Действительно, если этот угол будет большим, то вторичное облако, удаляясь от линии SA , вскоре перестанет проектироваться на фотосферический диск звезды, и, следовательно, связанная с облаком абсорбционная система ослабнет, а затем исчезнет.

Однако весьма часто вторичные абсорбционные системы существуют относительно долго, и, следовательно, в этом случае упомянутый угол не должен быть большим. В связи с этим интересно рассмотреть другие возможности.

б) Обратимся к рис. 13. Пусть вблизи момента $t = \bar{t}_g$ в направлении, совпадающем с направлением SA , движется облако B со скоростью v_B , мало отличающейся от средней скорости обращающего слоя, так что $v_B \approx v_p \approx v_s$. Так как различие между v_s и v_B мало, абсорбционная система, соответствующая облаку B , будет до максимума приблизительно совпадать с абсорбционной системой предмаксимального спектра и поэтому не будет зарегистрирована наблюдателями. Кроме того, ввиду приблизительного равенства между v_B и v_s селективное давление радиации на облако B будет до максимума (около $t = \bar{t}_g$) весьма небольшим. Действительно, вплоть до момента $t = t_v$ между фотосферой и нижней границей облака B будет заключено весьма большое количество рассеивающей материи, и вся она будет экранировать фотосферическую радиацию.

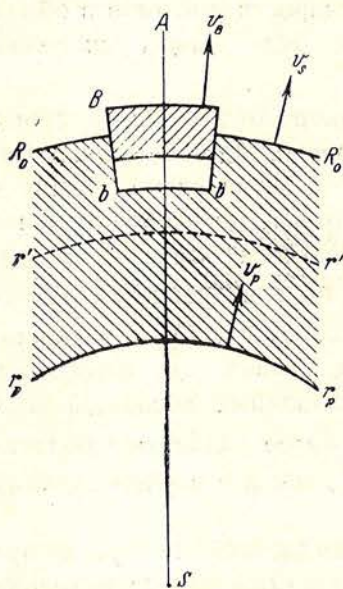


Рис. 13

Однако после максимума положение изменится. Во-первых, материя между уровнем r' и фотосферой не будет уже задерживать радиации, поглощаемой облаком B . Далее, по истечении некоторого промежутка времени после максимума часть материи, расположенная выше уровня $r = r'$, будет двигаться со скоростью $v = v_B$, заметно отличающейся от скорости v_B . Иначе говоря, теперь экраном для облака B будет служить только та материя, которая расположена непосредственно ниже уровня bb . Поскольку этой материи будет относительно немного, постольку интервал $\Delta\nu$, внутри которого обращающий слой экранировал облако B , заметно сузится. Поэтому в силу эффекта Доплера различие между v_B и v_s станет теперь уже весьма эффективным и селективное давление радиации на облако B заметно усилится. Следовательно, внутри облака B начнется $\alpha \rightarrow \beta$ процесс.

Допустим теперь, что в силу тех или иных причин, рассмотренных в предыдущем пункте, способность увеличивать свою скорость у облака B на много выше, чем у обрабатывающего слоя. Тогда мы получим вторичное облако, движущееся со скоростью большей, чем скорость, характеризующая главный спектр. Если, напротив, способность увеличивать свою скорость у облака B будет небольшой, то в конце концов β оболочка, образовавшаяся из материи, расположенной между уровнями bb и r' , догонит облако B и последнее исчезнет.

В рассмотренной нами модели мы будем иметь после максимума вторичное облако, движущееся в направлении SA .

Если же толщина α слоя, расположенного между уровнями bb и r' , заметно отличается от толщины α слоя $R_0 - r'$, то мы можем получить после максимума даже три абсорбционные системы. Действительно,

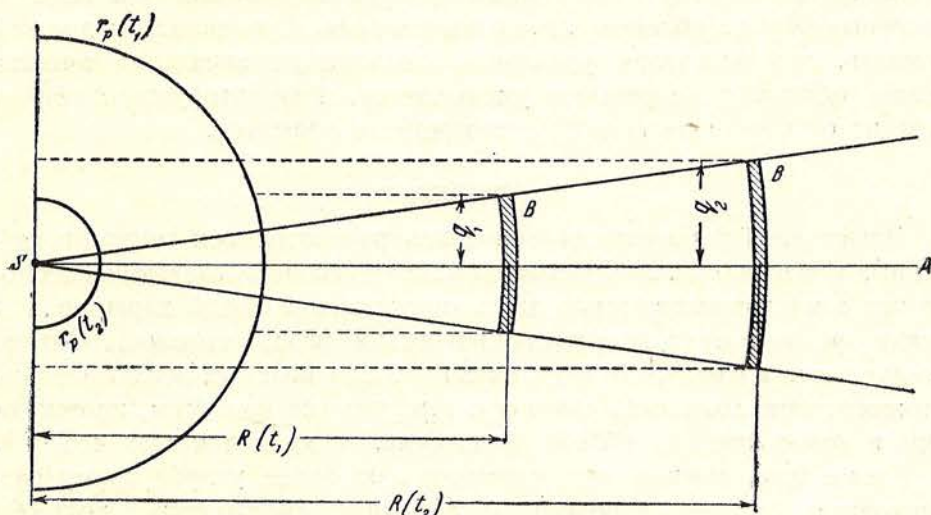


Рис. 14

в этом случае β оболочка, образованная в направлении SA , и β оболочка, включающая остальные направления, могут оказаться движущимися после $\alpha \rightarrow \beta$ процесса с различными скоростями.

Если площадь проекции нашего облака B на фотосферический диск (с точки зрения наблюдателя) мала по сравнению с площадью самого диска, то линии поглощения, обусловленные этим облаком, могут оказаться весьма слабыми. Однако существует фактор, который может повышать интенсивность вторичных абсорбционных систем. Для того чтобы понять это, обратимся к рис. 14. Пусть облако B удаляется от звезды, и пусть атомы, его составляющие, движутся радиально. Положения облака в моменты t_1 и t_2 характеризуются радиусами $R(t_1)$ и $R(t_2)$. В те же моменты размеры фотосферы характеризуются величинами $r_p(t_1)$ и $r_p(t_2)$. SA , — как обычно, направление:

центр звезды — наблюдатель. Так как после максимума звезда сжимается, то $r_p(t_1) > r_p(t_2)$.

Из рис. 14 следует, что в момент $t=t_1$ площадь проекции облака B на фотосферу весьма мала по сравнению с площадью всего диска фотосферы. Отношение обеих величин равно $q_1^2:r_p^2(t_1)$. Следовательно, в момент $t=t_1$ интенсивность линий поглощения, создаваемых облаком B , должна быть даже для обычно сильных линий весьма небольшой. Напротив, в момент $t=t_2$ мы имеем даже неравенство: $q_2 > r_p(t_2)$. Следовательно, интенсивность линий поглощения в момент $t=t_2$ должна быть нормальной (как в случае обычных звезд). Рассмотренный здесь фактор может играть в некоторых случаях весьма важную роль.

Следует, однако, указать и другой эффект, действующий в противоположную сторону, чем только что рассмотренный. Он ведет к непрерывному ослаблению линий поглощения. А именно, мы должны помнить, что благодаря удалению оболочки от звезды оптическая толща оболочки непрерывно уменьшается. Результирующий эффект зависит от сочетания обоих рассмотренных эффектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы ограничились рассмотрением вопросов, связанных в основном, с выбрасыванием материи новыми звездами. Рассмотрение этих вопросов носило здесь иногда весьма общий характер, и с точки зрения математической эти вопросы не разрабатывались. Однако следует иметь в виду, что изучаемая проблема является исключительно сложной. Эта сложность связана с тем, что все процессы, протекающие в новых звездах вблизи максимума, не являются статическими.

Кроме того, прежде чем переходить к более углубленному рассмотрению данной проблемы, необходимо разработать, хотя бы схематически, наиболее правдоподобную модель, описывающую интересующие нас явления. Особенно это важно для новых звезд, где часто явления оказываются весьма запутанными.

Следующая задача в данном направлении будет состоять в том, чтобы сравнить результаты рассмотренных здесь общетеоретических соображений с результатами дальнейших наблюдений или с результатами более детальной обработки в отношении уже имеющихся материалов. Если это сравнение окажется в пользу настоящей качественной теории, то тогда уже можно будет приступить к математической разработке разобранных здесь вопросов. Это, конечно, более трудная задача.

В то же время совершенно ясно, что если мы будем исходить из неправильной модели, то математическое исследование может оказаться полностью непригодным для модели, описывающей реальную Новую.

Москва, декабрь, 1945.

Литература

1. D. B. Mc Laughlin, Pop. Astr., 52, 109, 1944.
2. D. B. Mc Laughlin, Ap. J., 85, 362, 1937.
3. D. B. Mc Laughlin, Ap. J., 95, 428, 1942.
4. E. A. Milne, M. N., 86, 459, 1926.
5. W. H. Mc Crea, Zs. f. Ap., 14, 208, 1937.
6. W. H. Mc Crea, Observatory, 60, 277, 1937.
7. S. R. Pike, M. N., 89, 538, 1929.
8. Э. Р. Мустель, Астр. журн., 22, 65, 1945.
9. Э. Р. Мустель, Астр. журн., 22, 185, 1945.
10. D. B. McLaughlin, Astr. Journ., 45, 145, 1936.
11. A. B. Wyse, Lick Publ., 14, part 3, 93.
12. R. B. Baldwin, Michigan Obs. Publ., 8, 61, № 5.
13. F. J. M. Stratton, Observatory, 59, 325, 1936.
14. W. E. Harper, Publ. Dominion Astr. Obs., 6, 318, 1937.
15. A. Beer, M. N., 97, 231, 1937.
16. R. Minkowski, Ap. J., 85, 18, 1937.
17. T. G. Cowling, Observatory, 60, 167, 1937.
18. Э. Р. Мустель, Астр. журн., 22, 347, 1945.
19. В. А. Амбарцумян, Труды Ленинград. гос. ун-та, № 22, Серия астрон., № 4, 14, 1938.
20. W. Grottrian, Zs. f. Ap., 13, 215, 1937.
21. F. J. M. Stratton, Ann. Solar Phys. Obs. Cambridge, IV, part 11, 75, 1936.
22. W. H. Wright, Lick Obs. Publ., 14, part 2.
23. F. J. M. Stratton, Ann. Solar Phys. Obs. Cambridge, IV, part 1, 1920.
24. L. Campbell, Ann. of HCO, 76, № 11, 191.
25. H. Spencer-Jones, Ann. Cape Obs. 10, part 9, 1931.
26. P. Merrill, Ap. J., 82, 413, 1935.
27. H. Krumpholz, Mitt. Wiener Sternwarte, № 4, 214, 1935.
28. O. C. Wilson, Ap. J., 82, 233, 1935.
29. F. J. M. Stratton, см. ссылку [21], стр. 133.
30. D. B. Mc Laughlin, Michigan Publ., 6, № 12.
31. E. G. Williams, M. N., 99, 91, 1938.
32. L. Campbell, Ann. of HCO, 81, № 2, 113.
33. Б. А. Воронцов-Вельяминов, Астр. журн., 16, № 2, 17, 1939.
34. J. Genard, M. N., 92, 396, 1932.
35. J. H. Moore and C. D. Shane, Lick Obs. Bull., 10, 32, 1919.
36. D. B. Mc Laughlin, Astr. Journ., 52, 126, 1947.
37. Э. Р. Мустель, Астр. Журн., 24, 280, 1947.
38. Э. Р. Мустель, Астр. Журн., 25, 11, 1948.
39. D. B. Mc Laughlin, Astr. Journ., 52, 156, 1947.
40. Э. Р. Мустель, Астр. Журн., 24, 97, 1947.
41. Э. Р. Мустель, Астр. Журн., 24, 155, 1947.
42. D. B. Mc Laughlin, Michigan Obs. Publ., 8, 149, 1943.
43. Э. Р. Мустель, Астр. Журн., 23, 289, 1946.
44. Э. Р. Мустель, ДАН СССР, 29, 296, 1940.
45. Э. Р. Мустель, ДАН СССР, 29, 365, 1940.
46. Э. Р. Мустель, Астр. Журн., 21, 276, 1944.